

– Hiking in path-less terrain –  
the genesis of GR

Domenico Giulini

ZARM Bremen

Leibniz University Hannover

*Munich Joint Astronomy Colloquium*  
Garching, June 2nd 2016

Einstein

- on the way
- on GR

Looking back

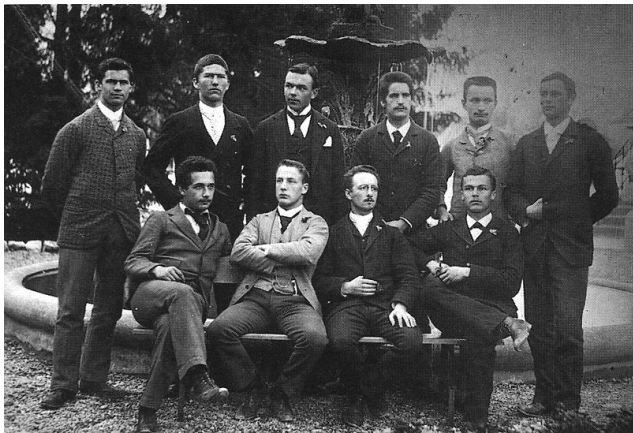
- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

Comparison N-E

The End



“In the 1890s our school (Einstein’s Gymnasium at Aarau, Canton Aargau) was dominated by a sharp atmosphere of scepticism, which can already be seen from the fact that no theologian emerged from our class or the two classes following ours. This atmosphere fitted the saucy swabian quite well, whose fancy high-handedness distinguished him from his classmates.”

#### Einstein

- on the way
- on GR

#### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

#### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- “Entwurf” paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

#### Comparison N-E

#### The End

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

„Arduous intellectual work and the contemplation of God's Nature are the angels, which will guide me in a conciliative, invigorating, and yet inexorably through all the troubles of life.”

“Die angestrengte geistige Arbeit und das Anschauen von Gottes Natur sind die Engel, welche mich versöhnend, stärkend und doch unerbittlich streng durch die Wirren dieses Lebens führen werden“

*A.E. to Pauline Winteler (Mamerl), May 1897*

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

„Arduous intellectual work and the contemplation of God's Nature are the angels, which will guide me in a conciliative, invigorating, and yet inexorably through all the troubles of life.”

“Die angestrengte geistige Arbeit und das Anschauen von Gottes Natur sind die Engel, welche mich versöhnend, stärkend und doch unerbittlich streng durch die Wirren dieses Lebens führen werden“

*A.E. to Pauline Winteler (Mamerl), May 1897*



# The Winteler Family around 1900



Marie, Maja Einstein, Paul, Anna, Jost, Pauline (Mamerl), Rosa

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

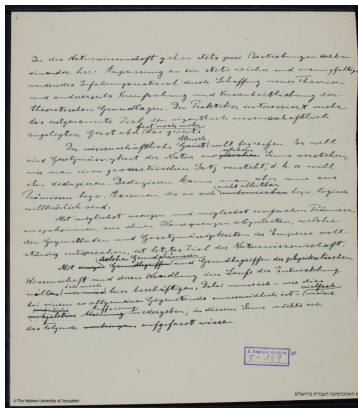
## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

## Einstein 1931: Meaning and aim of science



- ▶ "In the sciences there are two parallel objectives: Adaptation to a body of evidence, that is continuously growing in size and complexity, by means of new theories and simplification of theoretical foundations. Whereas the practitioner is more interested in the first aim, the truly scientifically oriented mind even more so in the second."
- ▶ The scientific mind wants to comprehend (be-greifen). He wants to understand a law of Nature in the same sense as he understands a theorem in geometry, that is, he wants to deduce it. But deduction rests on assumptions or axioms, which are themselves not deducible, i.e., logically arbitrary."
- ▶ To manage with the fewest and simplest possible assumptions and to deduce from them consequences which correspond completely to the objects and laws of empiricism is the final aim of science."

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

## Max Born: „Physics and Relativity” (Bern 1955)

“The foundation of general relativity appeared to me then [1915], and it still does, as the greatest feat of human thinking about Nature, the most amazing combination of philosophical penetration, physical intuition and mathematical skill. But its connections with experience were slender. It appealed to me like a great work of art, to be enjoyed and admired – from a (respectful) distance.”



### Einstein

- on the way
- on GR

### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

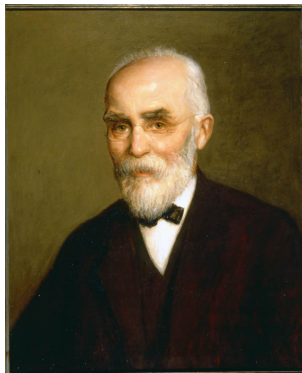
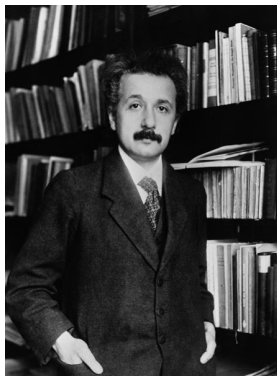
### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

### Comparison N-E

### The End

## Einstein an H.A. Lorentz am 17.1.1916



"The series of my papers on gravity is a chain of wrong tracks which slowly but surely approached the destination. Finally the basic equations are ok, but their derivation is abominable. This blemish has to be cured."

### Einstein

- on the way
- on GR

### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

### Comparison N-E

### The End

# The end of Einstein's Gibson Lecture (1933)

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

"Once the validity of this mode of thought has been recognised, the final results appear almost simple; any intelligent undergraduate can understand them without much trouble. But the years of searching in the dark for a truth that one feels, but cannot express; the intense desire and the alteration of confidence and misgiving, until one breaks through to clarity and understanding, are only known to him who has himself experienced them."

- 1905 B-CH 1) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. (SRT)  
 2) „Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?“
- 1907 B-CH 3) „Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie“. Spannungen - auch elektrostatische - tragen zur trägen Masse bei.  
 4) „Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“. Erster großer Übersichtsartikel; endet mit erster versuchsweiser Erweiterung des Relativitätsprinzips auf gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme.
- 1911 Z-CH 5) „Die Relativitäts-Theorie“. Abschiedsvorlesung am 16.01.11 vor der Naturforschenden Ges. in Zürich; u.a. 'Zwillingsparadoxon' als unabweisbare Konsequenz.  
 6) „Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichts“. Ableitung des (halben) Ablenkwinkels auf Grundlage des Äquivalenzprinzips.
- 1912 P-Cz 7) „Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes“ und „Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes“. Nichtlineare Erweiterung der Newtonschen Feldgleichungen.  
 8) „Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist?“. Argumentiert, dass sich die träge Masse bei Anwesenheit umgebender schwerer Massen erhöht (→ „Machsches Prinzip“).
- 1913 Z-CH 9) „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation“. Argumentiert gegen skalare Theorie und kommt Prinzip der allg. Kovarianz sehr nahe. Kurz danach zurückgenommen; große Verwirrung (Lochbetrachtung). Hilfe von Grossmann und Besso (Manuskript: Merkurperiheldrehung).  
 10) „Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems“. Vortrag vom 23.9.1913 auf der 85. Naturforscherversammlung in Wien.  
 11) Zürcher Notizbuch
- 1915 B-D 12) Die vier Novemberarbeiten: 4. „Zur ART“, 11. „Addendum“, 18. „Merkurperihel“, 25. „Feldgleichungen“.
- 1916 B-D 13) „Die Grundlagen der ART“. Erste zusammenfassende Gesamtdarstellung.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

- 1905 B-CH 1) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. (SRT)  
 2) „Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?“
- 1907 B-CH 3) „Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie“. Spannungen - auch elektrostatische - tragen zur trägen Masse bei.  
 4) „Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“. Erster großer Übersichtsartikel; endet mit erster versuchsweiser Erweiterung des Relativitätsprinzips auf gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme.
- 1911 Z-CH 5) „Die Relativitäts-Theorie“. Abschiedsvorlesung am 16.01.11 vor der Naturforschenden Ges. in Zürich; u.a. 'Zwillingsparadoxon' als unabweisbare Konsequenz.  
 6) „Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichts“. Ableitung des (halben) Ablenkungswinkels auf Grundlage des Äquivalenzprinzips.
- 1912 P-Cz 7) „Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes“ und „Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes“. Nichtlineare Erweiterung der Newtonschen Feldgleichungen.  
 8) „Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist?“. Argumentiert, dass sich die träge Masse bei Anwesenheit umgebender schwerer Massen erhöht (→ „Machsches Prinzip“).
- 1913 Z-CH 9) „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation“. Argumentiert gegen skalare Theorie und kommt Prinzip der allg. Kovarianz sehr nahe. Kurz danach zurückgenommen; große Verwirrung (Lochbetrachtung). Hilfe von Grossmann und Besso (Manuskript: Merkurperiheldrehung).  
 10) „Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems“. Vortrag vom 23.9.1913 auf der 85. Naturforscherversammlung in Wien.  
 11) Zürcher Notizbuch
- 1915 B-D 12) Die vier Novemberarbeiten: 4. „Zur ART“, 11. „Addendum“, 18. „Merkurperihel“, 25. „Feldgleichungen“.
- 1916 B-D 13) „Die Grundlagen der ART“. Erste zusammenfassende Gesamtdarstellung.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

# Principle of Relativity („Discorsi“ 1638)



Galileo Galilei (1564-1642)

*“Shut yourself up with some friend in the main cabin below decks on some large ship, and have with you there some flies, butterflies, and other small flying animals. Have a large bowl of water with some fish in it; hang up a bottle that empties drop by drop into a wide vessel beneath it. With the ship standing still, observe carefully how the little animals fly with equal speed to all sides of the cabin. The fish swim indifferently in all directions; the drops fall into the vessel beneath; and, in throwing something to your friend, you need throw it no more strongly in one direction than another, the distances being equal; jumping with your feet together, you pass equal spaces in every direction. [...] Now let the ship proceed with any speed you like, so long as the motion is uniform and not fluctuating this way and that. You will discover not the least change in all the effects named, nor could you tell from any of them whether the ship was moving or standing still.*

*The cause of all these correspondences of effects is the fact that the ship’s motion is common to all the things contained in it, and to the air also. That is why I said you should be below decks; for if this took place above in the open air, which would not follow the course of the ship, more or less noticeable differences would be seen in some of the effects noted.”*

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- “Entwurf” paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End



▶ **Galilei-Newton law of inertia:**

There is a distinguished class of reference frames (inertial systems) and time-scales (inertial time-scales). Relative to them force-less bodies move rectilinearly and uniformly (equal distances in equal time spans).

▶ **Galilei's principle of relativity:**

Two identical closed physical systems, moving relative to each other in rectilinear and uniform motion, are indistinguishable in all aspects which can be measured on each individual system by mechanical means.

▶ **Die Galilei-Transformationen:**

The mathematical implementation of the principle of relativity in terms of inertial coordinates is by Galilei transformations:

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

$$t \mapsto t' = t$$

▶ **Inertia and forces:**

The structure (path structure) that defines “inertial trajectories” is *a priori* given and non-dynamical. Causes for deviations from those preferred trajectories are “forces”. Gravity is such a force.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- “Entwurf” paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

# The crucial physical question

- ▶ Corresponding to the principle of relativity in mechanics we cannot detect *by mechanical means* an absolute translatory motion. This is contrary to rotatory motion, as Newton's bucket experiment is supposed to show.

Physicists at the end of the 19th century hence posed the following crucial question:

**Is the principle of relativity valid in elektrodynamics ?**

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

- ▶ The notion of *ponderable* ('weighable') matter contains all forms of everyday matter including atoms.
- ▶ Next to this, there exists a substance called *aether* which is the (hypothetical) carrier of electromagnetic fields and waves, like water is the carrier of the respective waves. Light waves correspond to transversal (polarisable) aether waves.
- ▶ The aether – as an elastic medium – resembles on one hand a solid body of enormous stiffness (admitting high-speed transversal waves) which, on the other hand, unhindered penetrates ponderable matter in solid-states, like glass (in which light propagates). Nobody knew how that could fit together.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

- ▶ Within the aether theory, the question of the validity of the relativity principle reduces to the question whether, and to what extent, the aether participates in the motion of ponderable matter.
- ▶ If it were dragged along completely, like air or water in fully sealed containers, the relativity principle would be as valid as in mechanics. (→ Galileo's ship; going under deck)
- ▶ On the other hand, if the aether would just stay fixed ("at rest") in space and freely stream through the bodies as they move in space (→ "aether-wind"), it would define a distinguished reference system. For example, light propagation would only be isotropic in the aether's rest system.
- ▶ Failed attempts to prove a state of motion for the aether led to SR (1905).

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

# Christie's: „Fine Printed Books and Manuscripts 22 June 2010 New York, Rockefeller Plaza



"The Origins of the General  
Theory of Relativity"

George A. Gibson Lecture  
University of Glasgow, June 20. 1933

- ▶ EINSTEIN, Albert (1879-1955). Auto-graph manuscript signed (A. Einstein on last page), constituting Einstein's lecture The Origin of the General Theory of Relativity (Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie), delivered as the first George A. Gibson Lecture at the University of Glasgow, 20 June 1933. A working draft with extensive deletions and interlinear additions. No place, undated, but ca. June 1933.
- ▶ Lot 195/Sale 2328. Estimate \$ 250,000 - \$ 350,000
- ▶ Price Realized \$ 578,500. (Sales totals are hammer price plus buyer's premium and do not reflect costs, financing fees or application of buyer's seller's credits.)

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

# Aus Einsteins Gibson Lecture (1933)

- ▶ “The most obvious procedure would have been to retain Laplace’s scalar potential and to amend Poisson’s equation by a term including time derivatives in the obvious way, so as to comply with Special Relativity. In addition, the law of motion for a mass point had to be adapted.”
- ▶ “Such investigations led to a result that aroused my deepest suspicion. Namely, according to Classical Mechanics, the vertical acceleration suffered by a body in a vertical gravitational field turns out to be independent of the body’s horizontal velocity component. It follows from this that the vertical acceleration of a mechanical system (or of its centre of gravity) in such a field should be independent of its internal kinetic energy. According to the theory I was investigating, however, the vertical acceleration was not independent of the horizontal velocity, and consequently, was not independent of the internal energy of the system.”
- ▶ “This did not agree with the old well-known empirical result that all bodies in a gravitational field are subject to the same acceleration. This principle, which can also be stated as the law of the equivalence of the inertial and gravitational mass, impressed me as being of fundamental importance. I wondered how this law could exist, and believed that it held the key to the real understanding of inertia and gravitation. I never seriously doubted its exact validity, even though I did not know about the beautiful experiments of Eötvös, which, if I remember correctly, were not known to me until a later date.”

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- “Entwurf” paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

# Special-Relativistic theory of scalar gravity I

- ▶ We seek a Poincaré invariant generalisation of

$$\Delta\varphi = 4\pi G \rho$$

- ▶ This is rather obvious:

$$\square\varphi := \left( \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) \varphi = -\frac{4\pi G}{c^2} T_{\mu}^{\mu}$$

- ▶ But what about the space-time trajectories of test particles? Mathematically consistent would be something like:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = P^{\mu\nu} \partial_{\nu} F[\phi]$$

where

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} / c^2$$

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

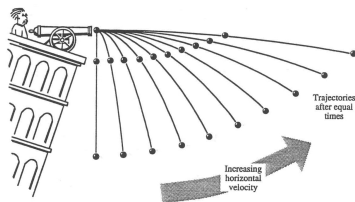
## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

# Special-Relativistic theory of scalar gravity II



Free fall with variable initial horizontal velocity ( $\beta = v/c$ ).

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -(1 - \beta^2(t)) \vec{\nabla} \phi(\vec{x}(t))$$

„Did not agree with the old well known empirical result ... “

$$\tau_h = \frac{c}{g} \cos^{-1} \left( \exp(-hg/c^2) \right) \approx \sqrt{2h/g}$$

$$t_h = \frac{c}{g} \gamma \cosh^{-1} \left( \exp(hg/c^2) \right) \approx \gamma \sqrt{2h/g}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory

- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

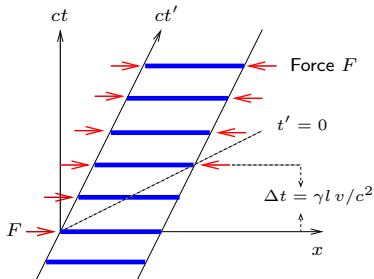
## Comparison N-E

The End



## Tensions become heavy (1907)

A rod of rest-length  $l$  moves with velocity  $v$  along  $x$ -axis relative to coordinate system  $K$ . At time  $t' = 0$  in its rest system both ends will be acted on by equal and opposite compression forces  $F$ . The compressive stress in its interior is then given by  $\sigma = F/\text{cross-section}$ .



- ▶ Judged from system  $K$  the force applied to the trailing end starts to push the rod a time  $\Delta t$  earlier than the counteracting force at the leading end. However, during this time the velocity of the rod does not change! Hence, by conservation of momentum, it follows that the rod has an increased inertial mass as a result of the compressive stress  $\sigma$  of:

$$\Delta p = F\Delta t = F\gamma l v/c^2$$

$$\Rightarrow \Delta m = Fl/c^2 = \sigma V/c^2$$

### Einstein

- on the way
- on GR

### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

### Comparison N-E

### The End

## A glimpse ahead: Spherical stars in GR

- ▶ In order to reach hydrostatic equilibrium, the radial pressure of an incompressible spherical star has to grow in an inward direction according to the *Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Equation* (1939):

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{G}{r^2} \cdot \underbrace{\frac{4\pi r^3}{3} \cdot (\rho + 3p/c^2)}_{\text{aktive Masse}} \cdot \underbrace{(\rho + p/c^2)}_{\text{passive Masse}} \cdot \underbrace{\left(1 - (2GM(r)/c^2 r)\right)^{-1}}_{\text{Geometrie}}$$

- ▶ Pressure adds to the active as well as passive gravitational mass, which leads to instabilities. Contrary to Newtonian stars, which in principle can always exist, given effective pressure generation, there is a fundamental upper bound on the compactness of a star in GR (also valid in compressible base, Buchdahl 1959) for the pressure to stay finite at the centre:

$$R > \frac{9}{8} \cdot \frac{2GM}{c^2}$$

### Einstein

- on the way
- on GR

### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

### Comparison N-E

### The End

### 3. *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes; von A. Einstein.*

$$\Delta c = k c \rho,$$

1) In einer in kurzem nachfolgender Arbeit wird gezeigt werden, daß die Gleichung (5a) und (5b) noch nicht exakt richtig sein können. In dieser Arbeit sollen sie vorläufig benutzt werden.

Prag, Februar 1912.

(Eingegangen 26. Februar 1912.)

#### Einstein

- on the way
- on GR

#### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

#### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

#### Comparison N-E

#### The End

***Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes;  
von A. Einstein.***

$$\Delta c = k \left\{ c \sigma + \frac{1}{2k} \frac{\text{grad}^2 c}{c} \right\}$$

- ▶ These equations can be derived from a straightforward physical modification of Newton's field equation through the requirement that the gravitational field's self energy gravitates according to  $E = mc^2$ . However, this does not give correct orbital corrections, e.g., for perihelion advance.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

***Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes;  
von A. Einstein.***

$$\Delta c = k \left\{ c \sigma + \frac{1}{2k} \frac{\text{grad}^2 c}{c} \right\}$$

- ▶ These equations can be derived from a straightforward physical modification of Newton's field equation through the requirement that the gravitational field's self energy gravitates according to  $E = mc^2$ . However, this does not give correct orbital corrections, e.g., for perihelion advance.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

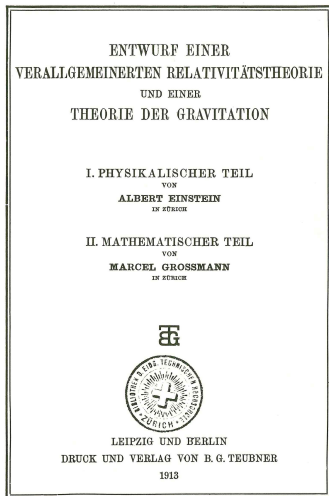
- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End



I.  
Physikalischer Teil.  
VON ALBERT EINSTEIN.

Die im folgenden dargelegte Theorie ist aus der Überzeugung hervorgegangen, daß die Proportionalität zwischen der trägen und der schweren Masse der Körper ein exakt gültiges Naturgesetz sei, das bereits in dem Fundamente der theoretischen Physik einen Ausdruck finden müsse. Schon in einigen früheren Arbeiten<sup>1)</sup> suchte ich dieser Überzeugung dadurch Ausdruck zu verleihen, daß ich die schwere auf die träge Masse zurückzuführen suchte; dieses Bestreben führte mich zu der Hypothese, daß ein (unendlich wenig ausgedehntes homogenes) Schwerefeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollkommen ersetzen lasse. Anschaulich läßt sich diese Hypothese so aussprechen: Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter kann auf keine Weise entscheiden, ob der Kasten sich ruhend in einem statischen Gravitationsfeld befindet, oder ob sich der Kasten in einem von Gravitationsfeldern freien Raume in beschleunigter Bewegung befindet, die durch an dem Kasten angreifende Kräfte aufrecht erhalten wird (Äquivalenz-Hypothese).

Daß das Gesetz der Proportionalität der trägen und der schweren Masse jedenfalls mit außerordentlicher Genauigkeit erfüllt ist, wissen wir aus einer fundamental wichtigen Untersuchung von Eötvös<sup>2)</sup>, die auf folgender Überlegung beruht. Auf einen an der Erdoberfläche ruhenden Körper wirkt sowohl die Schwere als auch die von der Drehung der Erde herrührende Zentrifugalkraft. Die erste dieser Kräfte ist proportional der schweren, die zweite der trägen Masse. Die Richtung der Resultierenden dieser beiden Kräfte, d. h. die Richtung der scheinbaren Schwerkraft (Lotrichtung) müßte also von der physikalischen Natur des ins Auge gefaßten Körpers abhängen, falls die Proportionalität der trägen und schweren Masse nicht erfüllt wäre. Es ließen sich dann die scheinbaren Schwerkraft, welche auf Teile eines heterogenen starren Systems wirken, im allgemeinen nicht zu einer Resultierenden vereinigen; es bliebe vielmehr im allgemeinen ein Drehmoment der scheinbaren

1) A. Einstein, Ann. d. Physik 4. 35. S. 898; 4. 38. S. 255; 4. 38. S. 442.

2) B. Eötvös, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII 1890. Wiedemann, Beiblätter XV. S. 688 (1891).

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

Schwerkräfte übrig, das sich beim Aufhängen des Systems an einem torsionsfreien Faden hätte bemerkbar machen müssen. Indem Eötvös die Abwesenheit solcher Drehmomente mit großer Sorgfalt feststellte, bewies er, daß das Verhältnis beider Massen für die von ihm untersuchten Körper mit solcher Genauigkeit von der Natur des Körpers unabhängig war, daß die relativen Unterschiede die dies Verhältnis von Stoff zu Stoff noch besitzen könnte, kleiner als ein Zwanzigmilliontel sein mußte.

Beim Zerfall radioaktiver Stoffe werden so bedeutende Energiemengen abgegeben, daß die Änderung der trägen Masse des Systems, welche nach der Relativitätstheorie jener Energieabnahme entspricht, gegenüber der Gesamtmasse nicht sehr klein ist.<sup>1)</sup> Beim Zerfall von Radium beträgt z. B. jene Abnahme  $\frac{1}{1050}$  der Gesamtmasse. Würden jenen Änderungen der trägen Masse nicht Änderungen der schweren Masse entsprechen, so müßten Abweichungen der trägen von der schweren Masse bestehen, die weit größer sind, als es die Eötvösschen Versuche zulassen. Es muß also als sehr wahrscheinlich betrachtet werden, daß die Identität der trägen und der schweren Masse exakt erfüllt ist. Aus diesen Gründen scheint mir auch die Äquivalenzhypothese, welche die physikalische Wesenlichkeit der schweren mit der trägen Masse auspricht, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu besitzen.<sup>2)</sup>

## § 1. Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im statischen Schwerfeld.

Gemäß der gewöhnlichen Relativitätstheorie<sup>3)</sup> bewegt sich ein kräftefrei bewegter Punkt nach der Gleichung

$$(1) \quad \delta \left\{ \int ds \right\} = \delta \left\{ \int \sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2} \right\} = 0.$$

Denn es besagt diese Gleichung nichts anderes, als daß sich der materielle Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt. Es ist dies die Bewegungsgleichung in Form des Hamiltonschen Prinzipes; denn wir können auch setzen

$$(1a) \quad \delta \left\{ \int H dt \right\} = 0,$$

wobei

$$H = - \frac{ds}{dt} m$$

1) Die Abnahme der trägen Masse, die der abgegebenen Energie  $E$  entspricht, ist bekanntlich  $\frac{E}{c^2}$ , wenn mit  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet wird.

2) Vgl. auch § 7 dieser Arbeit.

3) Vgl. M. Planck, Verb. d. deutsch. phys. Ges. 1906. S. 186.

Bei gegebener Geschwindigkeit sind also Impuls und kinetische Energie der Größe  $c$  umgekehrt proportional; anders ausgedrückt: Die träge Masse, so wie sie in Impuls und Energie eingeht, ist  $\frac{m}{c}$ , wobei  $m$  eine für den Massenpunkt charakteristische, vom Gravitationspotential unabhängige Konstante bedeutet. Es paßt dies zu Machs kühnem Gedanken, daß die Trägheit in einer Wechselwirkung des betrachteten Massenpunktes mit allen übrigen ihren Ursprung habe; denn häufen wir Massen in der Nähe des betrachteten Massenpunktes an, so verkleinern wir damit das Gravitationspotential  $\epsilon$ , erhöhen also die für die Trägheit maßgebende Größe  $\frac{m}{c}$ .

## § 2. Gleichungen für die Bewegung des materiellen Punktes im beliebigen Schwerfeld. Charakterisierung des letzteren.

Mit der Einführung einer räumlichen Veränderlichkeit der Größe  $c$  haben wir den Rahmen der gegenwärtig als „Relativitätstheorie“ bezeichnete Theorie durchbrochen; denn es verhält sich nun der mit  $ds$  bezeichnete Ausdruck orthogonaler linearen Transformationen der Koordinaten gegenüber nicht mehr als Invariante. Soll also — woran nicht zu zweifeln ist — das Relativitätsprinzip aufrecht erhalten werden, so müssen wir die Relativitätstheorie derart verallgemeinern, daß sie die im vorigen in ihren Elementen angedeutete Theorie des statischen Schwerfeldes als Spezialfall enthält.

Führen wir ein neues Raum-Zeitssystem  $K'(x', y', z', t')$  ein durch irgend eine Substitution

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t) \\ y' &= y'(x, y, z, t) \\ z' &= z'(x, y, z, t) \\ t' &= t'(x, y, z, t), \end{aligned}$$

und war das Schwerfeld im ursprünglichen System  $K$  ein statisches, so geht bei dieser Substitution die Gleichung (1) in eine Gleichung von der Form

$$\delta \left\{ \int ds' \right\} = 0$$

über, wobei

$$ds'^2 = g_{11} dx'^2 + g_{22} dy'^2 + \dots + 2g_{12} dx' dy' + \dots$$

gesetzt ist, und die Größen  $g_{\mu\nu}$  Funktionen von  $x', y', z', t'$  sind. Setzen wir  $x_1, x_2, x_3, x_4$  statt  $x', y', z', t'$  und schreiben wir wieder  $ds$  statt  $ds'$ , so erhalten die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes in bezug auf  $K'$  die Gestalt

$$(1'') \quad \begin{cases} \delta \left\{ \int ds \right\} = 0, & \text{wobei} \\ ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \end{cases}$$

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

Zunächst können wir aus der Bedeutung, welche  $ds$  im Bewegungsgesetz des materiellen Punktes spielt, den Schluß ziehen, daß  $ds$  eine absolute Invariante (Skalar) sein muß; hieraus ergibt sich, daß die Größen  $g_{\mu\nu}$  einen kovarianten Tensor zweiten Ranges bilden<sup>1)</sup>, den wir als den kovarianten Fundamentaltensor bezeichnen. Dieser bestimmt das Schwerefeld. Es ergibt sich ferner aus (7) und (9), daß Impuls und Energie des materiellen Punktes zusammen einen kovarianten Tensor ersten Ranges, d. h. einen kovarianten Vektor bilden.<sup>2)</sup>

### § 3. Bedeutung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ für die Messung von Raum und Zeit.

Aus dem Früheren kann man schon entnehmen, daß zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  und den mittelst Maßstäben und Uhren zu erhaltenden Meßergebnissen keine so einfachen Beziehungen bestehen können, wie in der alten Relativitätstheorie. Es ergab sich dies bezüglich der Zeit schon beim statischen Schwerefeld.<sup>3)</sup> Es erhebt sich deshalb die Frage nach der physikalischen Bedeutung (prinzipiellen Meßbarkeit) der Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Hierzu bemerken wir, daß  $ds$  als invariantes Maß für den Abstand zweier unendlich benachbarter Raumzeitpunkte aufzufassen ist. Es muß daher  $ds$  auch eine vom gewählten Bezugssystem unabhängige physikalische Bedeutung zukommen. Wir nehmen an,  $ds$  sei der „natürlich gemessene“ Abstand beider Raumzeitpunkte und wollen darunter folgendes verstehen.

Die unmittelbare Nachbarschaft des Punktes  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  wird bezüglich des Koordinatensystems durch die infinitesimalen Variablen  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  bestimmt. Wir denken uns statt dieser durch eine lineare Transformation neue Variable  $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, d\xi_4$  eingeführt, derart, daß

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2$$

wird. Bei dieser Transformation sind die  $g_{\mu\nu}$  als Konstanten zu betrachten; der reelle Kegel  $ds^2 = 0$  erscheint auf seine Hauptachsen bezogen. In diesem elementaren  $d\xi$ -System gilt dann die gewöhnliche Relativitätstheorie, und es sei in diesem System die physikalische Bedeutung von Längen und Zeiten dieselbe wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie, d. h.  $ds^2$  ist das Quadrat des vierdimensionalen Abstandes beider unendlich benachbarter Raumzeitpunkte, gemessen mittelst eines im  $d\xi$ -System nicht beschleunigten starren Körpers und mittelst relativ zu diesem ruhend angeordneter Einheitsmaßstäbe und Uhren.

1) Vgl. II. Teil, § 1.    2) Vgl. II. Teil, § 1.

3) Vgl. z. B. A. Einstein, Ann. d. Phys. 4. 35. S. 908ff.

Den Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  nennen wir den (kontravarianten) Spannungs-Energetensor der materiellen Strömung. Der Gleichung (10) schreiben wir einen Gültigkeitsbereich zu, der über den speziellen Fall der Strömung inkohärenter Massen weit hinausgeht. Die Gleichung stellt allgemein die Energiebilanz zwischen dem Gravitationsfeld und einem beliebigen materiellen Vorgang dar; nur ist für  $\Theta_{\mu\nu}$ , der dem jeweiligen betrachteten materiellen System entsprechende Spannungs-Energetensor einzusetzen. Die erste Summe in der Gleichung enthält die örtlichen Ableitungen der Spannungen bzw. Energiestromdichte und die zeitlichen Ableitungen der Impuls- bzw. Energiedichte; die zweite Summe ist ein Ausdruck für die Wirkungen, welche vom Schwerefeld auf den materiellen Vorgang übertragen werden.

### § 5. Die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes.

Nachdem wir die Impuls-Energiegleichung für die materiellen Vorgänge (mechanische, elektrische und andere Vorgänge) mit bezug auf das Gravitationsfeld aufgestellt haben, bleibt uns noch folgende Aufgabe. Es sei der Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  für den materiellen Vorgang gegeben. Welches sind die Differentialgleichungen, welche die Größen  $g_{\mu\nu}$ , d. h. das Schwerefeld zu bestimmen gestatten? Wir suchen mit anderen Worten die Verallgemeinerung der Poissonschen Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir keine so vollkommen zwangsläufige Methode gefunden, wie für die Lösung des vorhin behandelten Problems. Es war nötig, einige Annahmen einzuführen, deren Richtigkeit zwar plausibel erscheint, aber doch nicht evident ist.

Die gesuchte Verallgemeinerung wird wohl von der Form sein

$$(11) \quad x \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu},$$

wo  $x$  eine Konstante,  $\Gamma_{\mu\nu}$  ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges ist, der durch Differentialoperationen aus dem Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  hervorgeht. Dem Newton-Poissonschen Gesetz entsprechend wird man geneigt sein zu fordern, daß diese Gleichungen (11) zweiter Ordnung sein sollen. Es muß aber hervorgehoben werden, daß es sich als unmöglich erweist, unter dieser Voraussetzung einen Differentialausdruck  $\Gamma_{\mu\nu}$  zu finden, der eine Verallgemeinerung von  $\Delta\varphi$  ist, und sich beliebigen Transformationen gegenüber als Tensor erweist.<sup>4)</sup> A priori kann allerdings nicht in Abrede gestellt werden, daß die endgültigen, genauen Gleichungen der Gravitation von höherer als zweiter Ordnung sein könnten. Es besteht daher immer noch die Möglichkeit, daß die

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 2.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End



Ableitung der Gravitations-Gleichungen

15

Wir wenden uns nun unserem Problem wieder zu. Aus Gleichung (10) geht hervor, daß

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \Theta_{\mu\nu}, \quad (\alpha=1, 2, 3, 4)$$

der pro Volumeneinheit auf die Materie vom Gravitationsfeld übertragene Impuls (bzw. Energie) ist. Damit der Energie-Impulsatz erfüllt sei, müssen die Differentialausdrücke  $\Gamma_{\mu\nu}$ , der Fundamentalgrößen  $\gamma_{\mu\nu}$ , welche in die Gravitationsgleichungen

$$x \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

eingehen, so gewählt werden, daß

$$\frac{1}{2x} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \Gamma_{\mu\nu}$$

sich derart umformen läßt, daß er als Summe von Differentialquotienten erscheint. Es ist andererseits bekannt, daß in dem für  $\Gamma_{\mu\nu}$  zu suchenden Ausdruck der Term (a) erscheint. Die gesuchte identische Gleichung ist also von folgender Gestalt:

Summe von Differentialquotienten

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \left\{ \sum_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} \right) \right.$$

+ weitere Glieder, die bei Bildung der ersten Annäherung wegfallen.)

Hierdurch ist die gesuchte Identität eindeutig bestimmt; bildet man sie nach dem angedeuteten Verfahren<sup>1)</sup>, so erhält man:

$$\begin{aligned} (12) \quad & \left( \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x_\beta} \right) \right) \\ & - \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \left\{ \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\gamma\delta}}{\partial x_\beta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Der in der geschweiften Klammer der rechten Seite stehende Ausdruck  $\Gamma_{\mu\nu}$  ist demnach der von uns gesuchte Tensor, der in die Gravitationsgleichungen

$$x \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

eintritt. Um diese Gleichungen besser überblicken zu können, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$(13) \quad -2x \cdot \Theta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \left( \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right).$$

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 3.

Aus der Gleichung (12a) folgt als Ausdruck für den Differentialtensor, der in die Gravitationsgleichungen eingeht

$$(17) \quad \Gamma_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\mu\nu}(\gamma) - x \cdot \Phi_{\mu\nu}$$

Die Gravitationsgleichungen (11) lauten also

$$(18) \quad \mathcal{A}_{\mu\nu}(\gamma) = x(\Theta_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}).$$

Diese Gleichungen erfüllen eine Forderung, die unseres Erachtens an eine Relativitätstheorie der Gravitation notwendig gestellt werden muß; sie zeigen nämlich, daß der Tensor  $\Phi_{\mu\nu}$  des Gravitationsfeldes in gleicher Weise felderregend auftritt, wie der Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  der materiellen Vorgänge. Eine Ausnahmestellung der Gravitationsenergie gegenüber allen anderen Energiearten würde ja zu unhaltbaren Konsequenzen führen.

Durch Addition der Gleichungen (10) und (12a) findet man mit Rücksicht auf die Gleichung (18)

$$(19) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \sqrt{-g} \cdot g_{\mu\nu} (\Theta_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}) \right] = 0. \quad (\alpha=1, 2, 3, 4)$$

Hieraus ersieht man, daß für Materie und Gravitationsfeld zusammen die Erhaltungssätze gelten.

Bei der bisher gegebenen Darstellung haben wir die kontravarianten Tensoren bevorzugt, weil sich der kontravariante Spannungstensor der Strömung inkohärenter Massen in besonders einfacher Weise ausdrücken läßt. Indessen können wir die gewonnenen Fundamentalbeziehungen ebenso einfach unter Benutzung kovarianter Tensoren ausdrücken. Statt  $\Theta_{\mu\nu}$  haben wir dann  $T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} \Theta_{\alpha\beta}$  als Spannungstensor des materiellen Vorganges zugrunde zu legen. Statt Gleichung (10) erhalten wir durch gliedweise Umformung

$$(20) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot T_{\mu\nu} = 0.$$

Aus dieser Gleichung und (16) folgt, daß die Gleichungen des Gravitationsfeldes auch in der Form

$$(21) \quad -D_{\mu\nu}(g) = x(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})$$

geschrieben werden können, welche Gleichungen auch direkt aus (18) abgeleitet werden können. Analog (19) besteht die Beziehung

$$(22) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \right] = 0.$$

## § 6. Einfluß des Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge, speziell auf die elektromagnetischen Vorgänge.

Weil bei jeglichem physikalischen Vorgang Impuls und Energie eine Rolle spielen, diese letzteren aber ihrerseits das Gravitationsfeld

Einstein-Großmann: Relativitätstheorie und Gravitation

2

Einstein

- on the way
- on GR

Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers

- "Entwurf" paper

- Zuerich notebook
- the breakthrough

Comparison N-E

The End

bestimmen und von ihm beeinflusst werden, müssen die das Schwerefeld bestimmenden Größen  $g_{\mu\nu}$  in allen physikalischen Gleichungssystemen auftreten. So haben wir gesehen, daß die Bewegung des materiellen Punktes durch die Gleichung

$$\delta \left( \int ds \right) = 0$$

bestimmt ist, wobei

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

$ds$  ist eine Invariante beliebigen Substitutionen gegenüber. Die gesuchten Gleichungen, welche den Ablauf irgend eines physikalischen Vorganges bestimmen, müssen nun so gebaut sein, daß die Invarianz von  $ds$  die Kovarianz des betreffenden Gleichungssystems zur Folge hat.

Bei der Verfolgung dieser allgemeinen Aufgaben stoßen wir aber zunächst auf eine prinzipielle Schwierigkeit. Wir wissen nicht, bezüglich welcher Gruppe von Transformationen die gesuchten Gleichungen kovariant sein müssen. Am natürlichsten erscheint es zunächst, zu verlangen, daß die Gleichungssysteme beliebigen Transformationen gegenüber kovariant sein sollen. Dem steht aber entgegen, daß die von uns aufgestellten Gleichungen des Gravitationsfeldes diese Eigenschaft nicht besitzen. Wir haben für die Gravitationsgleichungen nur beweisen können, daß sie beliebigen linearen Transformationen gegenüber kovariant sind; wir wissen aber nicht, ob es eine allgemeine Transformationsgruppe gibt, der gegenüber die Gleichungen kovariant sind. Die Frage nach der Existenz einer derartigen Gruppe für das Gleichungssystem (18) bzw. (21) ist die wichtigste, welche sich an die hier gegebenen Ausführungen anknüpft. Jedenfalls sind wir bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie nicht berechtigt, die Kovarianz physikalischer Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber zu fordern.

Andererseits aber haben wir gesehen, daß sich eine Energie-Impuls-Bilanzgleichung für materielle Vorgänge hat aufstellen lassen (§ 4, Gleichung 10), welche beliebige Transformationen gestattet. Es scheint deshalb doch natürlich, wenn wir voraussetzen, daß alle physikalischen Gleichungssysteme mit Ausschluß der Gravitationsgleichungen so zu formulieren sind, daß sie beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind. Die diesbezügliche Ausnahmestellung der Gravitationsgleichungen gegenüber allen anderen Systemen hängt nach meiner Meinung damit zusammen, daß nur erstere zweite Ableitungen der Komponenten des Fundamentaltensors enthalten dürften.

Die Aufstellung derartiger Gleichungssysteme erfordert die Hilfsmittel der verallgemeinerten Vektoranalysis, wie sie im II. Teil dargestellt ist.

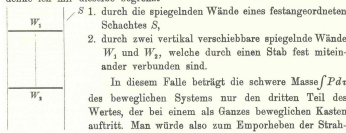
## § 7. Kann das Gravitationsfeld auf einen Skalar zurückgeführt werden?

Bei der unleugbaren Kompliziertheit der hier vertretenen Theorie der Gravitation müssen wir uns ernstlich fragen, ob nicht die bisher ausschließlich vertretene Auffassung, nach welcher das Gravitationsfeld auf einen Skalar  $\Phi$  zurückgeführt wird, die einzig naheliegende und berechtigte sei. Ich will kurz darlegen, warum wir diese Frage verneinen zu müssen glauben.

.....

Für die Strahlung im Vakuum verschwindet bekanntlich der Skalar  $P$ . Ist die Strahlung in einem masselosen spiegelnden Kasten eingeschlossen, so erfahren deren Wände Zugspannungen, die bewirken, daß dem System, — als Ganzes genommen — eine schwere Masse  $\int P d\tau$  zukommt, die der Energie  $E$  der Strahlung entspricht.

Statt nun aber die Strahlung in einen Hohlkasten einzuschließen, denke ich mir dieselbe begrenzt



1. durch die spiegelnden Wände eines festangordneten Schachtes  $S$ ,
2. durch zwei vertikal verschiebbare spiegelnde Wände  $W_1$  und  $W_2$ , welche durch einen Stab fest miteinander verbunden sind.

In diesem Falle beträgt die schwere Masse  $\int P d\tau$  des beweglichen Systems nur den dritten Teil des Wertes, der bei einem als Ganzes beweglichen Kasten auftritt. Man würde also zum Emporheben der Strahlung

entgegen einem Schwerefeld nur den dritten Teil der Arbeit aufwenden müssen als in dem vorhin betrachteten Falle, daß die Strahlung in einem Kasten eingeschlossen ist. Dies erscheint mir unannehmbar.

Ich muß freilich zugeben, daß für mich das wirksamste Argument dafür, daß eine derartige Theorie zu verwerfen sei, auf der Überzeugung beruht, daß die Relativität nicht nur orthogonalen linearen Substitutionen gegenüber besteht, sondern einer viel weiteren Substitutionsgruppe gegenüber. Aber wir sind schon deshalb nicht berechtigt, dieses Argument geltend zu machen, weil wir nicht in stande waren, die (allgemeinste) Substitutionsgruppe ausfindig zu machen, welche zu unseren Gravitationsgleichungen gehört.

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

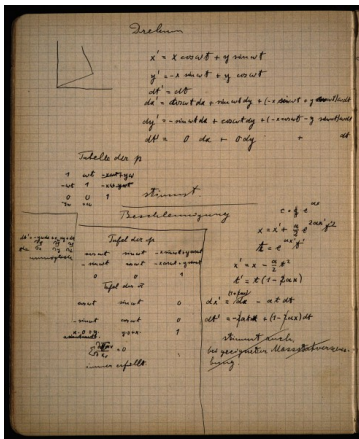
## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

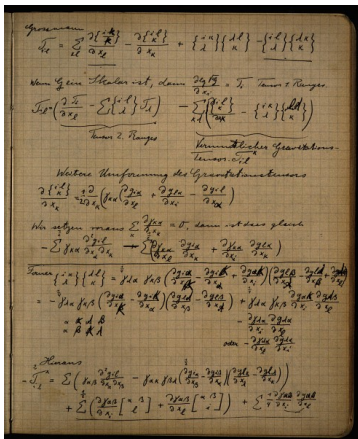
## Comparison N-E

## The End

# The "Zuerich Notebook"



p. 11 L



p. 22 R

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

## Die Feldgleichungen der Gravitation.

VON A. EINSTEIN.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen<sup>1</sup> habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariablen gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die NEWTONSCHE Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante  $\sqrt{-g}$  gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß  $\sqrt{-g} = 1$  gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unangenehm heranzuziehen.

Aus der bekannten RIEMANNSCHEN Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \quad (1)$$

$$R_{im} = -\sum_r \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} im \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_l} + \sum_l \left\{ \begin{matrix} il \\ \rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m\rho \\ l \end{matrix} \right\} \quad (1a)$$

$$S_{im} = \sum_r \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} il \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_m} - \sum_l \left\{ \begin{matrix} im \\ \rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho l \\ l \end{matrix} \right\} \quad (1b)$$

<sup>1</sup> Sitzungsber. XLIV. S. 778 und XLVI. S. 790, 1915.

EMERSON: Die Feldgleichungen der Gravitation

845

Die allgemein kovarianten zehn Gleichungen des Gravitationsfeldes in Räumen, in denen »Materie« fehlt, erhalten wir, indem wir ansetzen

$$G_{im} = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichungen lassen sich einfacher gestalten, wenn man das Bezugssystem so wählt, daß  $\sqrt{-g} = 1$  ist. Dann verschwindet  $S_{im}$  wegen (1b), so daß man statt (2) erhält

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x_l} + \sum_l \Gamma_{il}^l \Gamma_{im}^l = 0 \quad (3)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \quad (3a)$$

Dabei ist

$$\Gamma_{im}^l = -\left\{ \begin{matrix} l \\ im \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

gesetzt, welche Größen wir als die »Komponenten« des Gravitationsfeldes bezeichnen.

Ist in dem betrachteten Raume »Materie« vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bzw. (3) auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\kappa \left( T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \quad (2a)$$

wobei

$$\sum_{i,r} g^{ir} T_{ir} = \sum_r T_r = T \quad (5)$$

gesetzt ist;  $T$  ist der Skalar des Energietensors der »Materie«, die rechte Seite von (2a) ein Tensor. Spezialisieren wir wieder das Koordinatensystem in der gewohnten Weise, so erhalten wir an Stelle von (2a) die äquivalenten Gleichungen

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x_l} + \sum_l \Gamma_{il}^l \Gamma_{im}^l = -\kappa \left( T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right) \quad (6)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \quad (3a)$$

Wie stets nehmen wir an, daß die Divergenz des Energietensors der Materie im Sinne des allgemeinen Differentialkalküls verschwinde (Impulsenergiesatz). Bei der Spezialisierung der Koordinatenwahl gemäß (3a) kommt dies darauf hinaus, daß die  $T_{im}$  die Bedingungen

$$\sum_{i,r} \frac{\partial T_r}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \sum_{i,r} \frac{\partial g^{ir}}{\partial x_i} T_{ir} \quad (7)$$

oder

$$\sum_i \frac{\partial T_r}{\partial x_i} = -\sum_{i,r} \Gamma_{i,r}^i T_{ir} \quad (7a)$$

erfüllen sollen.

Einstein

- on the way
- on GR

Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

Comparison N-E

The End

## Der „Durchbruch zur Wahrheit“ (25. November 1915)

846 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Multipliziert man (6) mit  $\frac{\partial g^{im}}{\partial x_r}$  und summiert über  $i$  und  $m$ , so erhält man<sup>1</sup> mit Rücksicht auf (7) und auf die aus (3a) folgende Relation

$$\sum_{i,m} g_{im} \frac{\partial g^{im}}{\partial x_r} = - \frac{\partial \lg V - y}{\partial x_r} = 0$$

den Erhaltungssatz für Materie und Gravitationsfeld zusammen in der Form

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (T_i + t_i) = 0, \quad (8)$$

wobei  $t_i$  (der „Energietensor“ des Gravitationsfeldes) gegeben ist durch

$$t_i = \frac{1}{2} \delta_i^{\alpha} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} t_{\beta}. \quad (8a)$$

Die Gründe, welche mich zur Einführung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (2a) und (6) veranlaßt haben, erhellen erst aus den folgenden Überlegungen, welche den an der soeben angeführten Stelle (S. 785) gegebenen völlig analog sind.

Multiplizieren wir (6) mit  $g^{im}$  und summieren wir über die Indizes  $i$  und  $m$ , so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} - \kappa(T+t) = 0, \quad (9)$$

wobei entsprechend (5) zur Abkürzung gesetzt ist

$$\sum_i g^{ii} t_i = \sum_i t_i = t. \quad (8b)$$

Man beachte, daß es unser Zusatzglied mit sich bringt, daß in (9) der Energietensor des Gravitationsfeldes neben dem der Materie in gleicher Weise auftritt, was in Gleichung (21) a. a. O. nicht der Fall ist.

Ferner leitet man an Stelle der Gleichung (22) a. a. O. auf dem dort angegebenen Wege mit Hilfe der Energiegleichung die Relationen ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[ \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} - \kappa(T+t) \right] = 0. \quad (10)$$

Unser Zusatzglied bringt es mit sich, daß diese Gleichungen gegenüber (9) keine neue Bedingung enthalten, so daß über den Energie-

<sup>1</sup> Über die Ableitung vgl. Sitzungsb. XLIV, 1915, S. 784/785. Ich ersuche den Leser, für das Folgende auch die dort auf S. 785 gegebenen Entwicklungen zum Vergleich heranzusehen.

EINSTEIN: Die Feldgleichungen der Gravitation

847

tensor der Materie keine andere Voraussetzung gemacht werden muß als die, daß er dem Impulsenergiesatze entspricht.

Damit ist endlich die allgemeine Relativitätstheorie als logisches Gebäude abgeschlossen. Das Relativitätspostulat in seiner allgemeinsten Fassung, welches die Raumzeitkoordinaten zu physikalisch bedeutungslosen Parametern macht, führt mit zwingender Notwendigkeit zu einer ganz bestimmten Theorie der Gravitation, welche die Perihelbewegung des Merkur erklärt. Dagegen vermag das allgemeine Relativitätspostulat uns nichts über das Wesen der übrigen Naturvorgänge zu offenbaren, was nicht schon die spezielle Relativitätstheorie gelehrt hätte. Meine in dieser Hinsicht neulich an dieser Stelle geäußerte Meinung war irrtümlich. Jede der speziellen Relativitätstheorie gemäße physikalische Theorie kann vermittels des absoluten Differentialkalküls in das System der allgemeinen Relativitätstheorie eingereiht werden, ohne daß letztere irgendein Kriterium für die Zulässigkeit jener Theorie lieferte.

Einstein

- on the way
- on GR

Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

Comparison N-E

The End

## Newton

- ▶ Potential (Field)

$$\phi \quad (1 \text{ component})$$

- ▶ Field equation (1)

$$\Delta\Phi = 4\pi G \rho$$

- ▶ Equation of motion for test-mass

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}(t))$$

- ▶ Deviation from inertial motion: gravity is a force.

## Einstein

- ▶ Potential (Field)

$$g_{\mu\nu} \quad (10 \text{ components})$$

- ▶ Field equations (10)

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- ▶ Equation of motion for test-mass

$$\ddot{x}^\lambda(\tau) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau) = 0$$

- ▶ Pure inertial motion: Gravity is *not* a force in Newton's sense.

### Einstein

- on the way
- on GR

### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

### Comparison N-E

### The End

## The 10 sources of gravity

$$T^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} W & S^n/c \\ \hline G^m \cdot c & \Sigma^{mn} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} W : \text{energy density} \\ S^n : \text{energy-current density} \\ G^m : \text{momentum density} \\ \Sigma^{mn} : \text{momentum-current density} \end{array} \right.$$

$$g_{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} -1 + 2\Phi/c^2 & J_n \\ \hline J_m & \delta_{mn} + H_{mn} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi : \text{Newtonian potential} \\ J_n : \text{vector potential (gravitomagnetism)} \\ H_{mn} : \text{gravity waves} \end{array} \right.$$

## Einstein

- on the way
- on GR

## Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics concepts of matter

## On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- "Entwurf" paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

## Comparison N-E

## The End

“What you call agnostic regarding your point of view is also represented in mine, in a twofold way: Whatever of Nature’s feature we may display according to the principle of simplicity, its theoretical treatment will never prove correct once and for all. For example, Newton’s theory seems to represent all of the gravitational fields in a complete fashion through the scalar potential  $\varphi$ . But this description proves to be insufficient; it needs to be replaced by the functions  $g_{\mu\nu}$ . I do not doubt the day will come when this way of conceiving [gravity] will have to give way to another, which differs from it fundamentally, for reasons that today we cannot even imagine. I believe that this process of deepening our theories has no limits.”

*A.E. an Felix Klein, April 1917*

### Einstein

- on the way
- on GR

### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- “Entwurf” paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

### Comparison N-E

### The End

Thank you for listening!  
– and your patience –



“What you call agnostic regarding your point of view is also represented in mine, in a twofold way: Whatever of Nature’s feature we may display according to the principle of simplicity, its theoretical treatment will never prove correct once and for all. For example, Newton’s theory seems to represent all of the gravitational fields in a complete fashion through the scalar potential  $\varphi$ . But this description proves to be insufficient; it needs to be replaced by the functions  $g_{\mu\nu}$ . I do not doubt the day will come when this way of conceiving [gravity] will have to give way to another, which differs from it fundamentally, for reasons that today we cannot even imagine. I believe that this process of deepening our theories has no limits.”

*A.E. an Felix Klein, April 1917*

Thank you for listening!  
– and your patience –

### Einstein

- on the way
- on GR

### Looking back

- principle of relativity
- classical mechanics
- concepts of matter

### On the way

- Gibson Lecture
- scalar theory
- tension weighs
- Prague papers
- “Entwurf” paper
- Zuerich notebook
- the breakthrough

### Comparison N-E

### The End