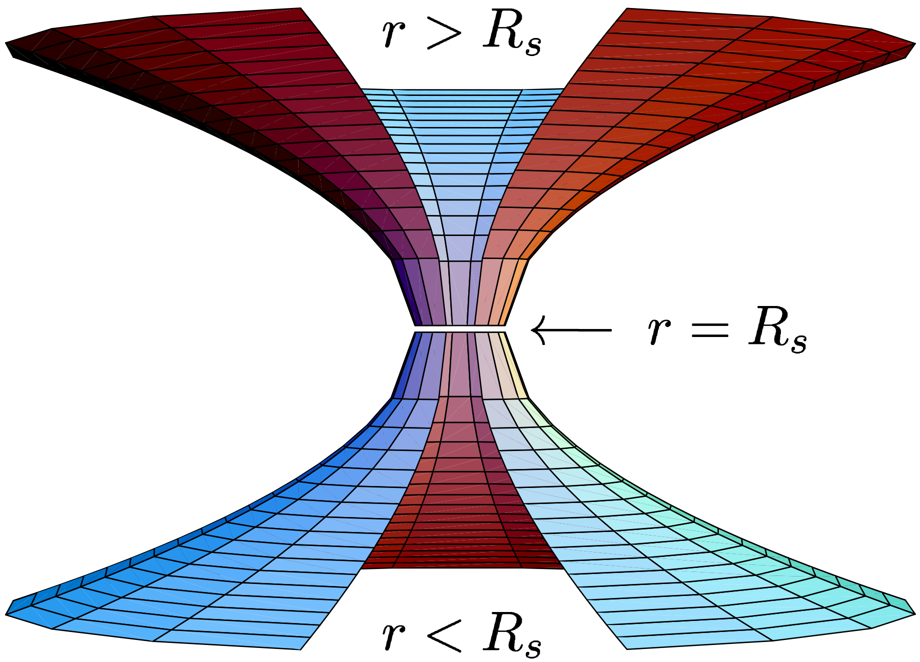
QUANTENGRAVITATION
und
TOPOLOGIE

DPG-Frühjahrstagung, Hannover, 24. März 2003

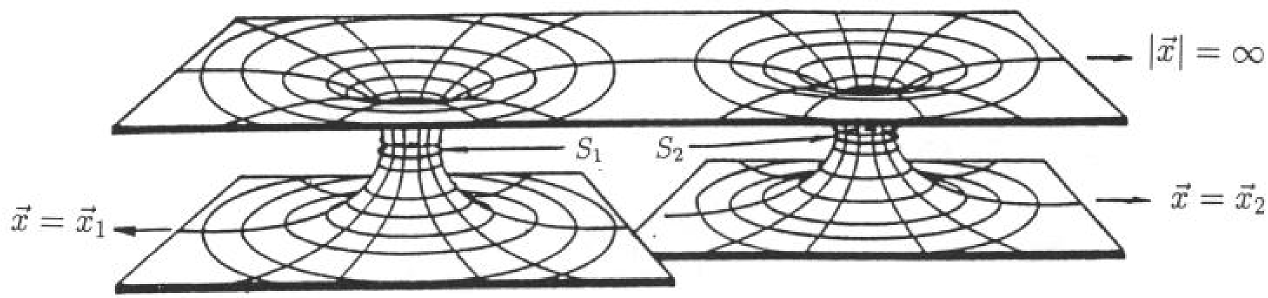
Unser Fehler ist nicht, daß wir unsere Theorien zu ernst nehmen, sondern daß wir sie nicht ernst genug nehmen.

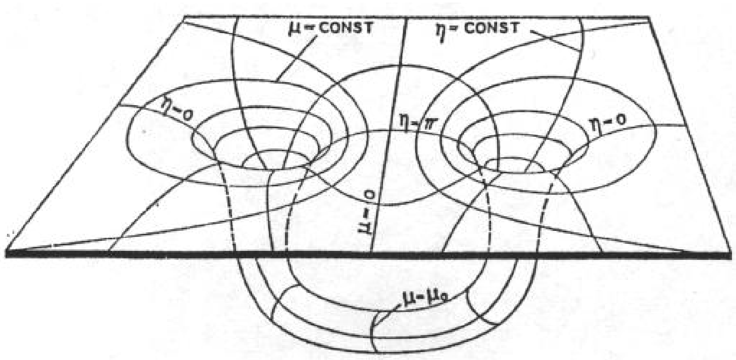
Steven Weinberg

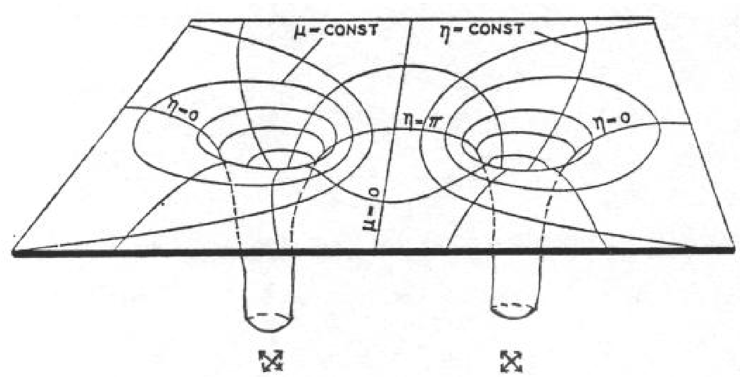
Schwarzes Loch



Topologien zweier Schwarzer Löcher







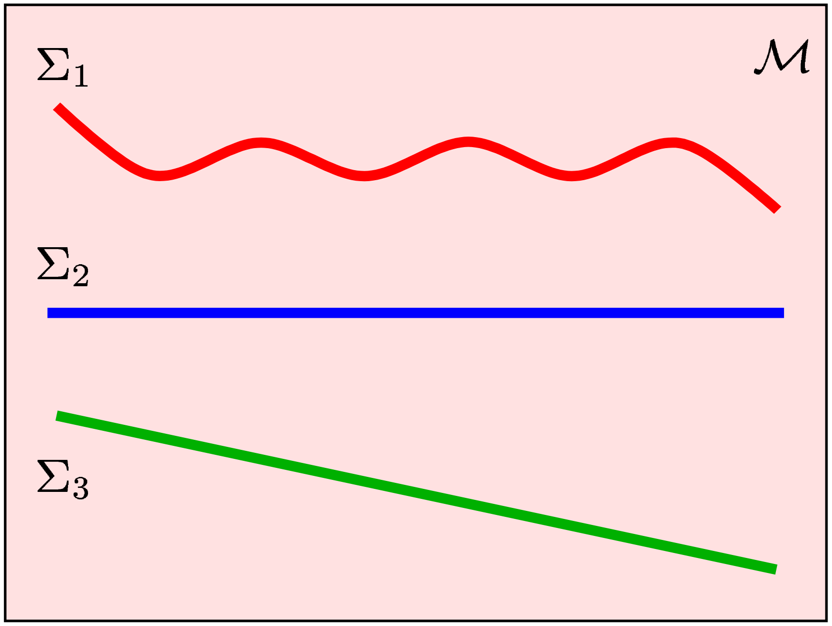
Einstein und Gauß

$$\boxed{\varepsilon\,(K_1K_2 + K_2K_3 + K_3K_1) + \tfrac{1}{2}R[g] = \rho + \Lambda}$$

- Gilt für **jede** in der Raumzeit eingebettete (raumartige) Hyperfläche Σ.

- Enthält nur Information, die **invariant unter Diffeomorphismen** auf Σ ist (Eichsymmetrie).

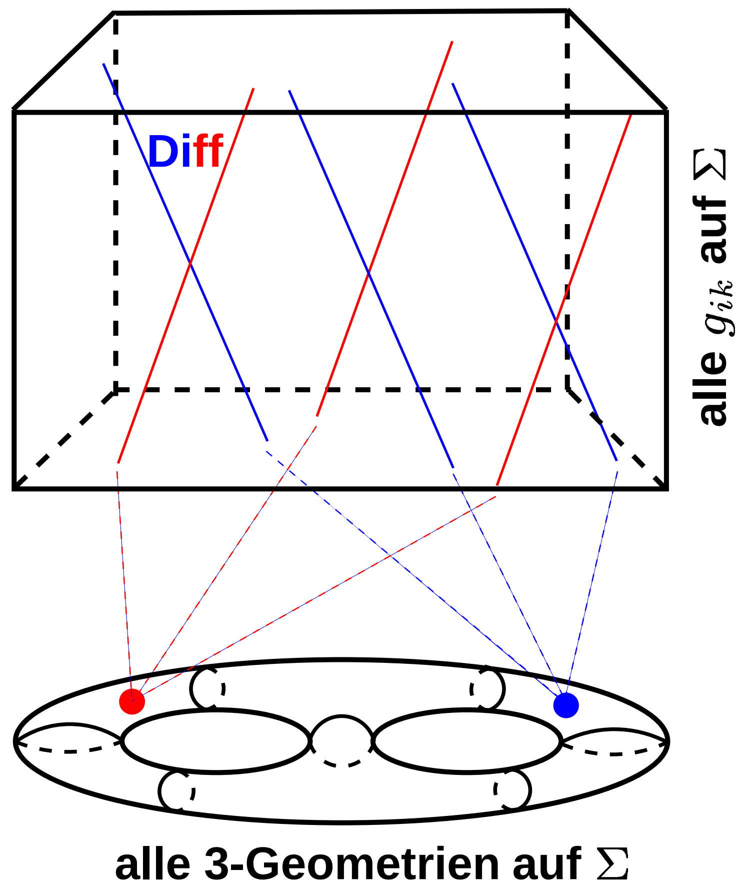
- Wird zur **„Wheeler-DeWitt-Gleichung“** in kanonischer Quantengravitation.



Lokale Variable

Alternative lokale Beschreibung des Gravitationsfeldes: Metrik $g_{ik}(x)$ auf Σ oder ein $SU(2)$-Eichpotential $A_k^\alpha(x)$.

- Quantenzustände sind dann Funktionale $\Psi(g)$ bzw. $\Psi(A)$, die der WDW-Gleichung genügen.
- Diese müssen zusätzlich invariant unter (fast allen) Diffeomorphismen von Σ sein und leben daher auf topologisch kompliziertem Moduliraum.



Schleifenvariable

$$\boxed{\Psi(\gamma) = \int \mathcal{D}A \; \Psi(A) \; \text{Spur} \left[\mathbf{P} \exp \left\{ \oint_\gamma A \right\} \right]}$$

- Physikalische Zustände $\Psi(\gamma)$ sind Funktionen auf dem Raum aller Schleifen γ in Σ.

- Diese müssen unter Diffeomorphismen von Σ invariant sein.

- Zustände sind daher insbesondere (verallgemeinerte) Knoten- bzw. Linkinvariante.

Offenes Fundamentalproblem der Knotentheorie

Finde **vollständigen** Satz von Knoteninvarianten !

- Neue Berechnungsmethoden und Verallgemeinerung von Invarianten durch Methoden der topologischen QFT:

$$\boxed{\langle W(\gamma,k)\rangle = \int \mathcal{D}A \ \exp\{ik\,\mathbf{S}_{\mathrm{Top}}[A]\}\ \text{Spur}\left[\mathbf{P}\exp\left\{\oint_\gamma A\right\}\right]}$$

- Diese liefern auch neue topologische Invarianten dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

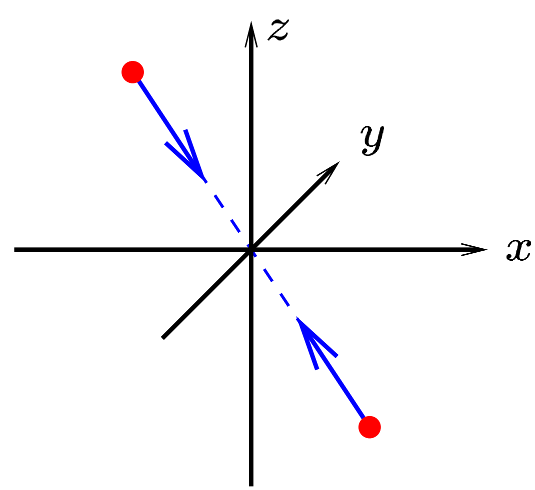
Homotop versus Isotop

Zwei Diffeomorphismen heißen **homotop** bzw. **isotop**, wenn sie durch eine Kurve **stetiger** bzw. **stetig-invertierbarer** Abbildungen verbindbar sind.

- In der ART sind Eichtransformationen solche Diffeomorphismen, die **isotop** zur Identität sind.
- Für 3-dim. geschlossene Mannigfaltigkeiten gab es die **Vermutung**, daß **H** $\Rightarrow$ **I**.

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Punktspiegelung homotop, aber nicht isotop zur Identität:

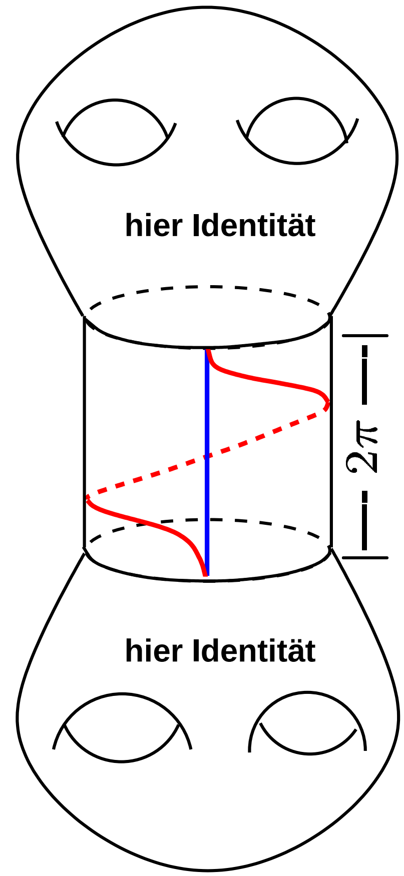
$$f_t(\vec{x}) = (1 - 2t)\,\vec{x}$$



Spinorielle Mannigfaltigkeiten

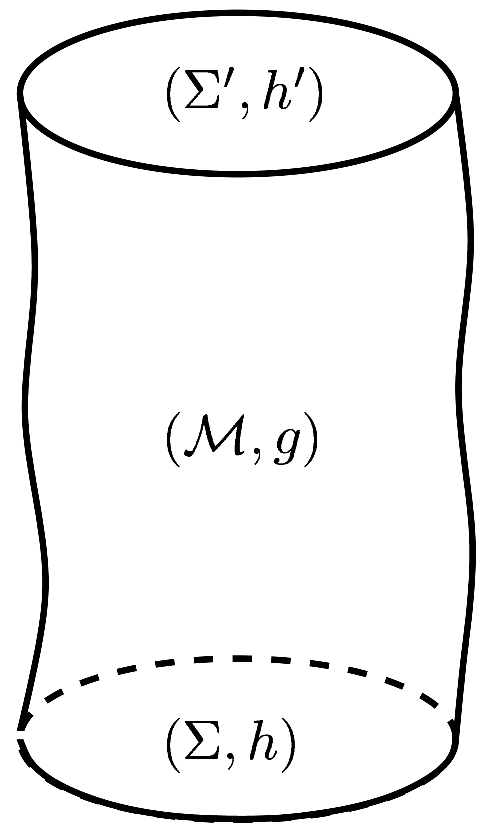
Das erste Beispiel eines 3-dim. geschlossenen Diffeomorphismus, der homotop, aber nicht isotop zur Identität ist, wurde 1986 angegeben. Er entspricht der relativen Drehung zweier spinorieller Mannigfaltigkeiten um 2π.

- Spinorialität ist in 3 Dimensionen vollständig entschieden.
- Die (H $\Rightarrow$ I) - Eigenschaft ist noch teilweise unentschieden.



Pfadintegral

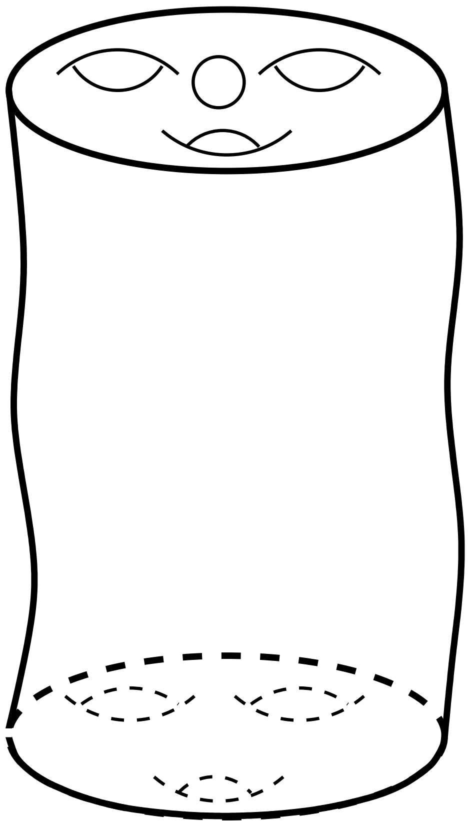
$$\boxed{\sum_{\mathcal{M}} \sum_{g} \exp(-S_e[g])}$$

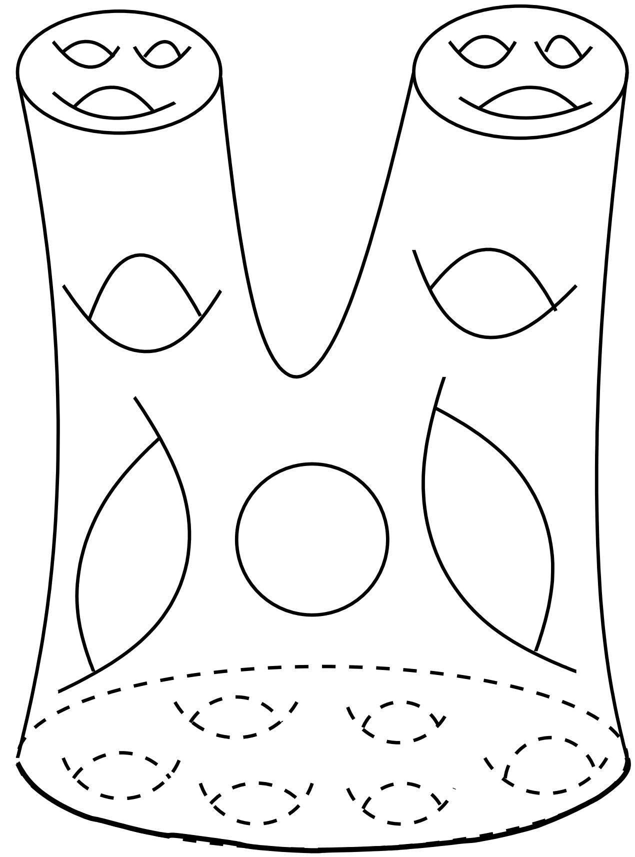


- „Summe“ über alle Metriken g (Lorentzsch bzw. Euklidisch) einer interpolierenden 4-Mannigfaltigkeit mit festen Randwerten h und h'.

- „Summe“ über alle 4-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ mit festen Rändern Σ und Σ'.

Topologiewechsel





Auswahlregeln

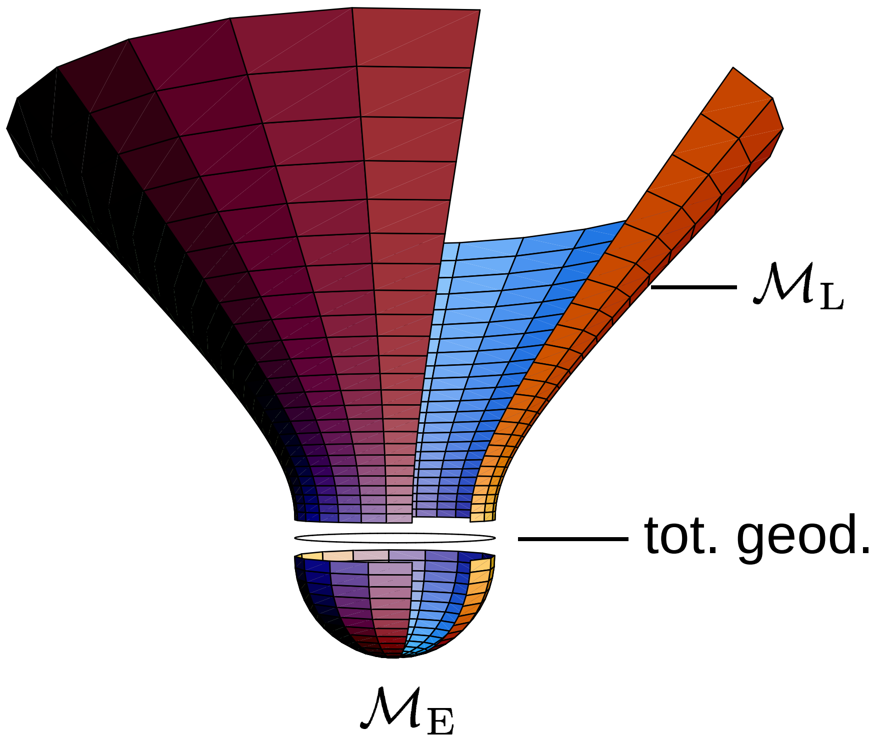
- Forderungen nach Existenz von Zusatzstrukturen auf der interpolierenden Raumzeit $\mathcal{M}$ implizieren topologische Auswahlregeln für mögliche Übergänge:

$$\boxed{\Sigma \to \Sigma'}$$

  - **Lorentzmetrik:** Keine Auswahlregeln in n+1 Dimensionen für n ungerade, außer für n=1. Sonst $\mathcal{X}(\Sigma) = \mathcal{X}(\Sigma')$.
  - **Lorentzmetrik + Spinstruktur:** Nichttriviale Auswahlregeln; vollständig bekannt in 3+1 Dimensionen.
  - **Kausale Stetigkeit:** Keine Auswahlregeln in n+1 Dimensionen, falls n ≥ 3.

„Geburt des Universums“

– reelle Tunnelgeometrien –



Euklidische Phase:

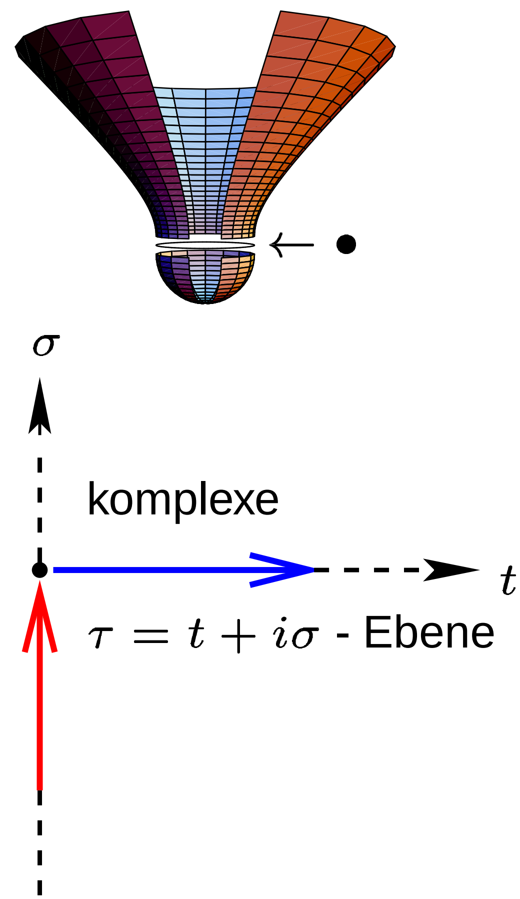
$$ds^2 \quad = \quad \frac{3}{\Lambda}\left(d\sigma^2 + \cos^2(\sigma)\ d^2\Omega_3\right)$$

für $\sigma \in [-\pi/2, 0]$

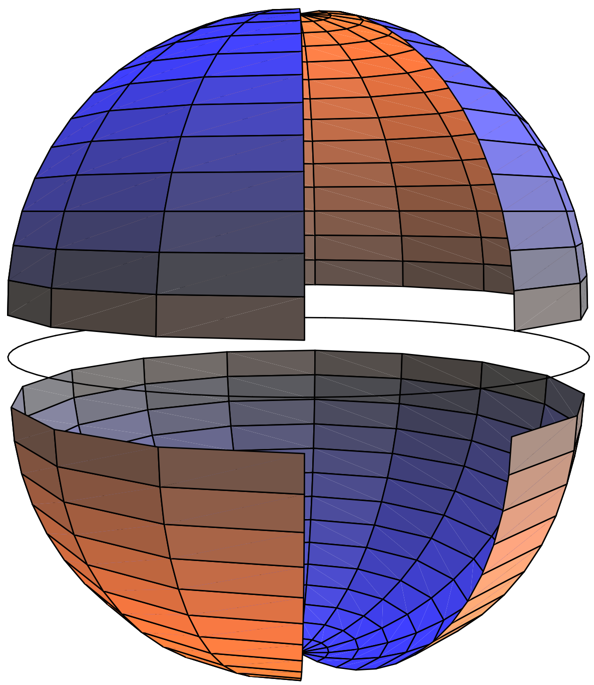
Lorentzsche Phase:

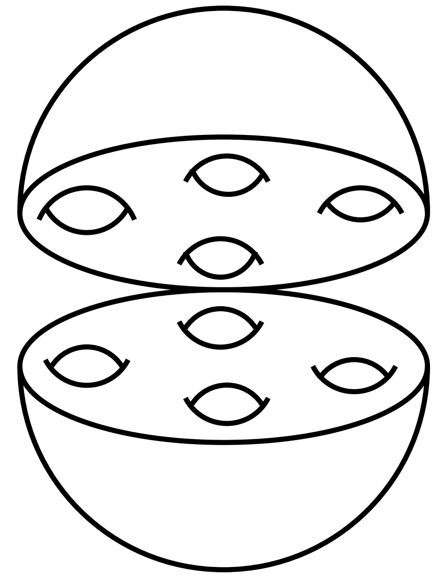
$$ds^2 \quad = \quad \frac{3}{\Lambda}\left(-dt^2 + \cosh^2(t)\ d^2\Omega_3\right)$$

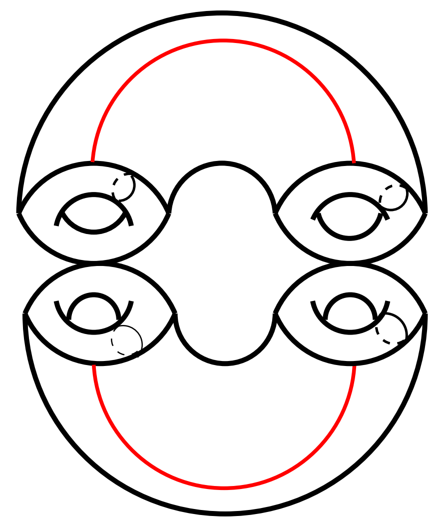
für $t \in [0, T > 0]$



Euklidische Verdoppelung







Entstehungswahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(\Sigma, h) \;\propto\; \exp\left\{\frac{\Lambda}{8\pi}\,\text{Vol}\,(2\mathcal{M}_{\mathrm{E}})\right\}}$$

1. Elliptischer Fall: $\Lambda > 0$
   - $\Rightarrow$ möglichst große Volumina
   - $\Rightarrow$ trotzdem Σ zusammenhängend
   - $\Rightarrow$ $\Sigma \;\cong\; S^3$

2. Hyperbolischer Fall: $\Lambda < 0$
   - $\Rightarrow$ möglichst kleine Volumina
   - $\Rightarrow$ deshalb Σ zusammenhängend
   - $\Rightarrow$ $\Sigma \;\cong\; ???$

„Man muß hier daran denken, daß die menschliche Sprache ganz allgemein erlaubt, Sätze zu bilden, aus denen keine Konsequenzen gezogen werden können, die also eigentlich völlig inhaltsleer sind, obwohl sie eine Art von anschaulicher Vorstellung vermitteln. So führt z.B. die Behauptung, daß es neben unserer Welt noch eine zweite gebe, mit der jedoch *prinzipiell* keinerlei Verbindung möglich sei, zu gar keiner Folgerung; trotzdem entsteht in unserer Phantasie bei dieser Behauptung eine Art von Bild. Selbstverständlich kann ein solcher Satz weder bewiesen noch widerlegt werden. – Besonders vorsichtig muß man bei der Anwendung des Ausdruckes: „in Wirklichkeit“ sein, da er eben leicht zu Behauptungen der eben besprochenen Art verleitet.“

Werner Heisenberg, 1929

Offene Probleme

- Finde geschlossene 4-dim. hyperbolische Mannigfaltigkeit mit kleinstem Volumen (in Einheiten des Krümmungsradius).

- Finde insbesondere solche Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ kleinsten Volumens, die eine total geodätische, separierende, 3-dim. Hyperfläche $\Sigma \hookrightarrow \mathcal{M}$ enthält, so daß durch sie $\mathcal{M}$ in zwei isometrische Stücke zerlegt wird ($\mathcal{M}$ also eine Euklidische Verdoppelung ist).

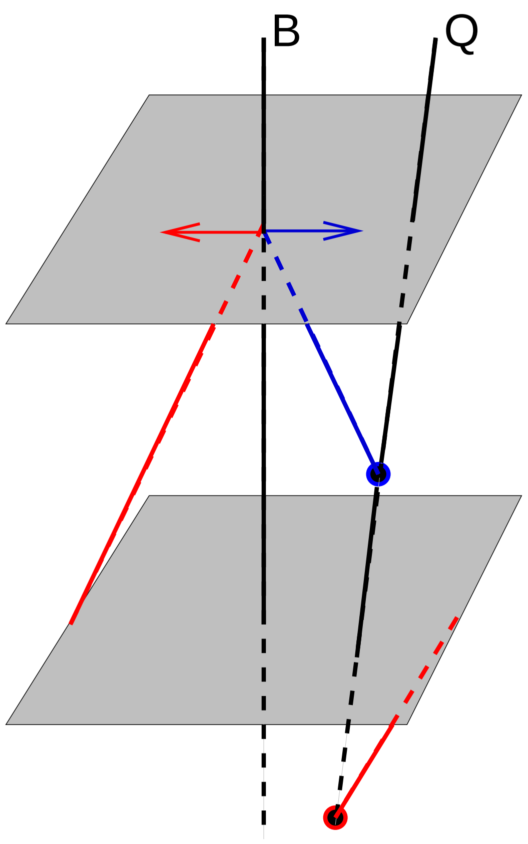
Anmerkung: Das Volumen von Σ ist durch das Volumen von $\mathcal{M}$

universell beschränkt:

$$\boxed{\text{Vol}(\Sigma) < C\,\text{Vol}(\mathcal{M})}$$

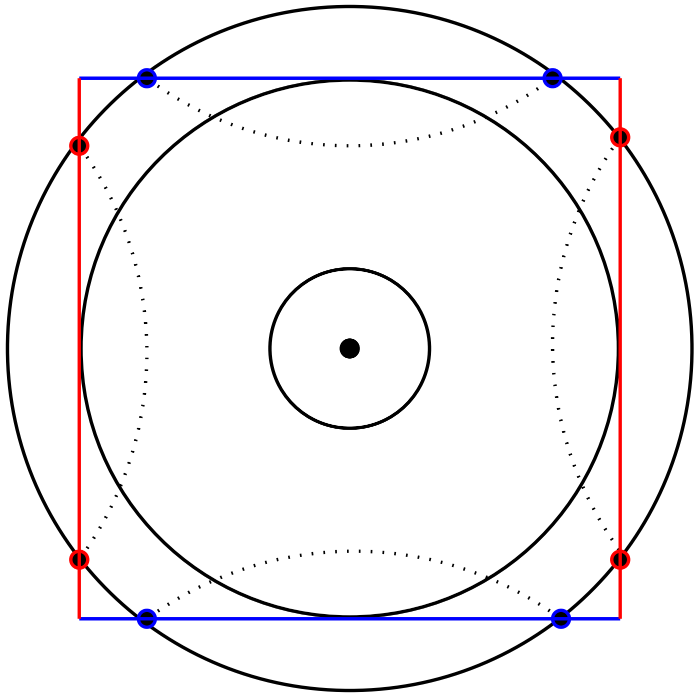
Topologische Mehrfachbilder

- In mehrfach zusammenhängenden Räumen entstehen charakteristische Mehrfachbilder derselben physikalischen Quelle (zu verschiedenen Emissionszeiten!), wenn die Fundamentalregion kleiner als das sichtbare Universum ist.



Korrelierte Kreise am Beobachterhimmel

- Die 2-Sphäre des beim Beobachter gleichzeitig eintreffenden Lichts überdeckt schließlich die Fundamentalregion mehrfach und schneidet sich in Kreisen, die der Beobachter in verschiedenen Richtungen wahrnimmt. Auch bei unvollständiger Überdeckung kann man aus ihnen u.U. bereits die volle topologische Information ablesen.



„Die heutige Quanten[feld]theorie, die auf der speziellen Relativitätstheorie beruht, ist schrecklich kompliziert. [...] Viele Gründe sprechen dafür, eine Theorie ohne Raum und Zeit zu befürworten. Aber niemand weiß, wie eine derartige Theorie aufzubauen ist. Der Ausweg, Raum und Zeit zu quantisieren, ist natürlich eine kindische Idee. Hier habe ich eine sehr ausgeprägte Meinung".

Albert Einstein, 1954