5. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 26.11.2010)

Aufgabe H09 *Messwerte einer Messapparatur* (4 Punkte)

Einer Messapparatur entspreche in der $\{|x\rangle, |y\rangle\}$-Basis die Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2(1-\mathrm{i}) \\ 2(1+\mathrm{i}) & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Welche Messwerte a sind mit A möglich? Man bestimme die zugehörigen (normierten) Eigenzustände $|a\rangle$.

(b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten W_a werden die Werte a gemessen, wenn das System unmittelbar vor der Messung präpariert ist im Zustand

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathrm{i}|x\rangle + |y\rangle\big) \;?$$

(c) Berechnen Sie bezüglich $|\psi\rangle$ den mittleren Messwert $\langle A\rangle$ und die Schwankung ΔA, wobei $(\Delta A)^2 = \langle\, (A - \langle A\rangle)^2\rangle$.

Hinweis: Es ist leichter, $\langle A\rangle$ und $\langle A^2\rangle$ in der Eigenbasis $\{|a\rangle\}$ auszurechnen.

Aufgabe H10 *Kommutierende Operatoren* (6 Punkte)

In einem drei-dimensionalen komplexen Zustandsraum $\mathbb{C}^3$ seien zwei Operatoren durch ihre Wirkung auf die Vektoren der orthonormierten Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} A|1\rangle &= 3|1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle \;, & B|1\rangle &= |1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle \;, \\ A|2\rangle &= \mathrm{i}\sqrt{2}|1\rangle + 2|2\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|3\rangle \;, & B|2\rangle &= -\mathrm{i}\sqrt{2}|1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|3\rangle \;, \\ A|3\rangle &= |1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + 3|3\rangle \;, & B|3\rangle &= |1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle \;. \end{aligned}$$

(a) Was sind die den Operatoren A und B bezüglich dieser Basis zugeordneten Matrizen?

(b) Zeigen Sie, dass die Operatoren A und B hermitesch sind und dass sie miteinander kommutieren.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte a und b von A bzw. B, deren Vielfachheiten sowie eine Orthonormalbasis $\{|\mathrm{I}\rangle, |\mathrm{II}\rangle, |\mathrm{III}\rangle\}$ simultaner Eigenzustände von A und B.

Hinweis: Betrachten Sie das Eigenwertproblem zu A. Bestimmen Sie erst den Eigenvektor $|\mathrm{I}\rangle$ zum einfachen Eigenwert a_1. Ein Eigenvektor zum doppelten Eigenwert $a_2{=}a_3$ lautet $|\mathrm{II}\rangle = \frac{1}{2}\big(|1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|2\rangle - |3\rangle\big)$. Konstruieren Sie den dritten Eigenvektor orthogonal zu $|\mathrm{I}\rangle$ und $|\mathrm{II}\rangle$.

(d) Welche Matrizen sind A und B bezüglich der Basis $\{|\mathrm{I}\rangle, |\mathrm{II}\rangle, |\mathrm{III}\rangle\}$ zugeordnet?