## 6. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 03.12.2010)

### Aufgabe H11 *Kommutator-Relationen und deren Konsequenzen* (4 Punkte)

(a) Man betrachte zwei lineare Operatoren $A$ und $B$, die eine vollständige, orthonormale Menge von simultanen Eigenkets $\{|a,b\rangle\}$ besitzen. Kann man daraus immer schließen, dass $A$ und $B$ miteinander kommutieren?

Wenn Ihre Antwort „Ja" lautet, beweisen Sie Ihre Behauptung.
Ist Ihre Antwort „Nein", geben Sie ein Gegenbeispiel an.

*Hinweis*: Nutzen Sie die Spektralzerlegung von $A$ und $B$ oder (was das gleiche ist) die Vollständigkeit der simultanen Eigenbasis, $\sum_i |a_i, b_i\rangle\langle a_i, b_i| = \mathbb{1}$.

(b) Betrachten Sie zwei *nicht* miteinander kommutierende Operatoren $A$ und $B$. Andererseits mögen diese Operatoren mit einem dritten Operator $H$ kommutieren. Zeigen Sie, dass wenigstens ein Eigenwert von $H$ entartet ist.

*Hinweis*: Beweis durch Widerspruch. Nehmen Sie an, dass $H|h_\ell\rangle = h_\ell|h_\ell\rangle$ mit $h_\ell \neq h_m$ für $\ell \neq m$ (keine Entartung eines $h_\ell$, Eigenvektor $|h_\ell\rangle$ eindeutig). Sind $A|h_\ell\rangle$ und $B|h_\ell\rangle$ ebenfalls Eigenzustände von $H$? Was folgt daraus für die Zustände $AB|h_\ell\rangle$ und $BA|h_\ell\rangle$ und wie verträgt sich dies mit der Voraussetzung $[A,B] \neq 0$?

### Aufgabe H12 *Kaon-Oszillationen* (6 Punkte)

Der Hamilton-Operator des Kaon-Systems lautet (in seiner Eigenbasis)

$$H = \hbar\,\alpha_S |K_S\rangle\langle K_S| + \hbar\,\alpha_L |K_L\rangle\langle K_L| \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \omega - \mathrm{i}\lambda \quad \text{und} \quad \omega, \lambda \in \mathbb{R}$$

für kurzlebige (S) und langlebige (L) Kaonen. Die Zeitentwicklung $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ ist gegeben durch den Zeitentwicklungsoperator, welcher in dieser Basis in der Vorlesung bestimmt wurde:

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}tH} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_S t}|K_S\rangle\langle K_S| + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_L t}|K_L\rangle\langle K_L| \,. \qquad (*)$$

(a) Berechnen Sie $U(t)$ in der $\{|K^0\rangle, |\overline{K^0}\rangle\}$-Basis, indem Sie zunächst $H$ in dieser Basis ausdrücken und dann exponentieren.

*Hinweis*: $|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle\big)$ und $|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle - |\overline{K^0}\rangle\big)$. Zerlegen Sie die 2×2-Matrix $H = D+N$ in einen Anteil $D \sim \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und einen Anteil $N \sim \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Wegen $[D,N]=0$ gilt $\mathrm{e}^{z(D+N)} = \mathrm{e}^{zD}\mathrm{e}^{zN}$ für $z \in \mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $K^0 \to \overline{K^0}$ als Funktion der Zeit mit Hilfe des in (a) gefundenen Zeitentwicklungsoperators.

*Hinweis*: $W(t) = \big|\langle\overline{K^0}|U(t)|K^0\rangle\big|^2$ benötigt in dieser Basis nur *ein* Matrixelement von $U(t)$. Nützlich kann sein: $\sin(x - \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y - \mathrm{i}\cos x \sinh y$.

(c) Wiederholen Sie die Rechnungen von (a) und (b), indem Sie direkt das $U(t)$ in $(*)$ in der $\{|K^0\rangle, |\overline{K^0}\rangle\}$-Basis ausdrücken und daraus $W(t)$ ermitteln. Übereinstimmung?

*Hinweis*: Es gilt die Identität $\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \frac{1}{2}\cosh 2y - \frac{1}{2}\cos 2x$.