9. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 07.01.2011)

Aufgabe H17 *Modell für H_2^+-Ion* (5 Punkte)

Ein Elektron der Masse m bewegt sich in einer Dimension im Zwei-Proton-Potential

$$V(x) \;=\; -V_0\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right] \qquad \text{mit} \qquad V_0>0 \quad \text{und} \quad a>0\;.$$

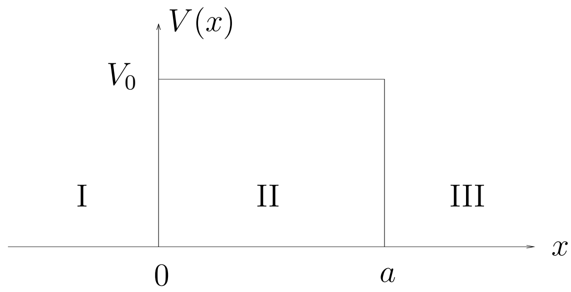
(a) Bestimmen Sie die Gleichungen für die Energieeigenwerte der Bindungszustände.
Hinweise: Nutzen Sie die Symmetrie des Potentials. Werten Sie die Anschlussbedingungen bei $x{=}a$ aus: ψ ist dort stetig, aber $\frac{\psi'}{\psi}$ muss dort um $-2mV_0/\hbar^2$ springen.

(b) Lösen Sie die Gleichungen für die Grenzfälle $a\to 0$ und $a\to\infty$. Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Eigenwerte als Funktion von a. Unterhalb welchen Abstands a_0 verschwindet der zweite Bindungszustand?
Hinweis: $\lim_{\kappa\to 0}\kappa\coth\kappa a=\frac{1}{a}$.

Bemerkung: Dies ist ein Modell für das H_2^+-Ion. Die Annäherung der Kerne ist energetisch günstig und führt zur chemischen Bindung.

Aufgabe H18 *Potentialschwelle* (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m wird von $x=-\infty$ kommend an der abgebildeten Potentialschwelle gestreut. Unterscheiden Sie im folgenden die Fälle $E\geq V_0$ und $0<E<V_0$.



Setzen Sie an:

$$\psi_I(x)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+B_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\;,\quad \psi_{II}(x)=?\;,\quad \psi_{III}(x)=A_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \text{mit} \quad k^2=2mE/\hbar^2\;.$$

(a) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung in den drei Bereichen I-III. Drücken Sie die Amplituden der Teillösungen durch die Amplitude der einfallenden Welle im Bereich I aus. Berücksichtigen Sie die Anschlussbedingungen beim Übergang zwischen den drei Bereichen.

(b) Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten $T=\left|\frac{j_t}{j_0}\right|$ und den Reflexionskoeffizienten $R=\left|\frac{j_r}{j_0}\right|$ mit den W.-Strömen $j_0=\frac{\hbar k}{m}|A_1|^2$, $j_t=\frac{\hbar k}{m}|A_3|^2$ und $j_r=\frac{\hbar k}{m}|B_1|^2$. Zeigen Sie, dass $R+T=1$.

(c) Welche Werte bekommen T und R bei $E\to\infty$, $E\to 0$ und $a\sqrt{2m(E{-}V_0)}=n\pi\hbar$ für $n=1,2,3,\ldots$. (Resonanzstreuung)?

Bitte wenden für zwei Bonusaufgaben!

Aufgabe B1 *Drehimpuls-Messungen* (6 Punkte)

Betrachten Sie die Operatoren

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;, \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \;, \quad L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;.$$

(a) Welche Messergebnisse für L_z gibt es?
Berechnen Sie $\langle L_x \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$ und ΔL_x im Zustand $|L_z{=}{+1}\rangle$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenkets von L_x in der L_z-Basis.

(c) Ein Teilchen sei im $|L_z{=}{-1}\rangle$ Zustand. Was sind die möglichen Ergebnisse, wenn man L_x messen würde? Geben Sie auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

(d) Gegeben sei der Zustand $|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}|L_z{=}{+1}\rangle + \frac{1}{2}|L_z{=}0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|L_z{=}{-1}\rangle$.
Wenn L_z^2 gemessen wird und das Ergebnis $+1$ lautet, was ist der Zustand nach dieser Messung? Wie wahrscheinlich war dieses Ergebnis?

(e) Geben Sie für den Zustand aus (d) die möglichen Ergebnisse bei einer L_z-Messung und deren Wahrscheinlichkeiten an.

(f) Ein Teilchen sei in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeiten

$$W(L_z{=}{+1}) = \tfrac{1}{4} \;, \quad W(L_z{=}0) = \tfrac{1}{2} \;, \quad W(L_z{=}{-1}) = \tfrac{1}{4}$$

sind. Begründen Sie, dass der allgemeinste normierte Zustand mit dieser Eigenschaft geschrieben werden kann als $|\psi'\rangle \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|L_z{=}{+1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|L_z{=}0\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}|L_z{=}{-1}\rangle$ mit beliebigen Phasen α, β und γ. Normierte Zustände $|\phi\rangle$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\phi\rangle$ sind bekannterweise äquivalent. Bedeutet dies, dass die obigen Phasenfaktoren in $|\psi'\rangle$ irrelevant sind? Berechnen Sie zum Test $W(L_x{=}0)$.

Aufgabe B2 *Tunneleffekt* (4 Punkte)

Eine Kiste mit einem Teilchen ist durch eine dünne Trennwand in eine linke und eine rechte Hälfte geteilt. Im Zustand $|R\rangle$ ($|L\rangle$) befindet sich das Teilchen mit Sicherheit auf der rechten (linken) Seite. Der allgemeinste Zustand erlaubt eine Entwicklung

$$|\psi\rangle \;=\; |R\rangle\langle R|\psi\rangle + |L\rangle\langle L|\psi\rangle \;.$$

Das Teilchen kann durch die Trennwand tunneln, was durch den Hamilton-Operator

$$H \;=\; \Delta \big(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| \big) \qquad \text{mit} \quad \Delta \in \mathbb{R}$$

beschrieben wird.

(a) Finden Sie die normierten Energie-Eigenkets und die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Konstruieren Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t)$.

(c) Zum Zeitpunkt $t{=}0$ sei das Teilchen mit Sicherheit rechts. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, es später links zu finden?

(d) Ein Druckfehler führt zu $H = \Delta\, |L\rangle\langle R|$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Zeitentwicklung die Gesamtwahrscheinlichkeit nicht erhält.