Klausur zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(geschrieben am Freitag, 28.01.2011)

Aufgabe K1 *10 Kurzfragen* (je 0.5 Punkte)

a) Wo liegen im Minkowskiraum die Punkte mit Vierer-Abstand Null zum Ursprung?
b) Welche der Größen sind Lorentz-invariant: Energie E, Drehimpuls² $\vec{L}^2$, Eigenzeit τ?
c) $A = |\psi\rangle\langle\phi|$. Drücken Sie $\mathrm{tr}(A^2)$ durch $\mathrm{tr}(A)$ aus.
d) Wieviele reelle Parameter benötigt die Festlegung eines reinen Qubit-Zustandes?
e) Zwei Observable vertauschen. Verschwindet dann stets ihr Unschärfeprodukt?
f) Welche Eigenschaft der Schrödingergleichung garantiert das Superpositionsprinzip?
g) $\langle x|P|\psi\rangle \;= ?$
h) Drehimpulseigenzustände: $L_+L_3|\ell\,\ell\rangle \;= ?$
i) Welche Zustände $|n\,\ell\,m\rangle$ sind im Coulomb-Potential bei $E = -\frac{\mathrm{Ry}}{4}$ entartet?
j) Welche der folgenden Zustände eines Zwei-Qubit-Systems sind verschränkt:
$|01\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |01\rangle\big)$, $\frac{1}{2}\big(|00\rangle - \mathrm{i}\,|01\rangle + \mathrm{i}\,|10\rangle + |11\rangle\big)$?

Aufgabe K2 *Photonabsorption?* (5 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse m und Viererimpuls p absorbiert ein Photon (masselos) mit Viererimpuls k. Ist dieser Prozess kinematisch möglich? Testen Sie die Energie-Impuls-Bilanz $p + k = p'$ für die Fälle

a) $m > 0$ (ein Proton) b) $m = 0$ (ein Gluon) c) $m_{\text{vor}} \neq m_{\text{nach}}$ $(\pi\gamma \to \rho)$.

Aufgabe K3 *Quanten-Ampel* (6 Punkte)

In einem Drei-Zustands-System („Qutrit“) mit Basis $\{|1\rangle\,, |2\rangle\,, |3\rangle\}$ definieren wir die Ampel-Observable $A \;=\; 3\,\mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $(4,4,2)$ und zugehörigen Eigenzuständen $\big(|\text{rot}\rangle\,, |\text{gelb}\rangle\,, |\text{grün}\rangle\big)$. Messwerte $a = 4$ und $a = 2$ meinen also `STOP` bzw. `GO`. Ein Strom von Quanten-Autos werde beschrieben durch den Zustand

$$|\psi\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big(|1\rangle + |2\rangle + \mathrm{i}\,|3\rangle\big)\;.$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für `STOP` und für `GO`.

b) Es wird ein Stromteiler als Weiche eingebaut, der eine Zerlegung $\mathbb{1} = F_1 + F_2$ durch zwei Filter (Projektoren)

$$F_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&1&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad F_2 \;=\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&-1&0\\ -1&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad F_i^2 = F_i \quad \& \quad F_1\,F_2 = 0$$

realisiert und demgemäß den Strom spaltet in zwei Teile $|\psi_i\rangle \propto F_i\,|\psi\rangle$ für $i = 1,2$. Welcher Anteil der Autos folgt welchem Teilstrom? Berechnen Sie die `GO`-Wahrscheinlichkeiten $W_{\texttt{GO}}(|\psi_i\rangle)$ für beide Teilströme. Wo steht die Ampel öfter auf grün?

Aufgabe K4 *Bilokalisiertes Teilchen* (4 Punkte)

Ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension sei zum Zeitpunkt $t{=}0$ an den Orten $x = \pm a$ lokalisiert:

$$\langle x|\psi(0)\rangle \;=\; \lambda\,\delta(x{-}a) \;+\; (1{-}\lambda)\,\delta(x{+}a) \qquad \text{mit} \quad \lambda \in [0,1]\ .$$

a) Bestimmen Sie die (unnormierte) Wellenfunktion $\langle x|\psi(t)\rangle$ für Zeiten $t{>}0$.

Hinweis: Erinnerung an den Propagator $\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}}\ \exp\big(\frac{\mathrm{i}m(x-y)^2}{2\hbar t}\big)$.

b) Berechnen Sie die (unnormierte) Wahrscheinlichkeit $W_a(t)$ dafür, das Teilchen bei der Ortsmessung zur Zeit t am Ort $x{=}a$ zu finden. Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf von $W_a(t)$ für $t{>}0$.

Aufgabe K5 *Ortskorrelation im harmonischen Oszillator* (5 Punkte)

Wir definieren die Korrelationsfunktionen

$$C_{|\psi\rangle}(t) \;=\; \langle\psi|\,X(t)\,X(0)\,|\psi\rangle \quad \text{und} \quad C^{-}_{|\psi\rangle}(t) \;=\; \langle\psi|\,[X(t)\,,X(0)]\,|\psi\rangle$$

für den Ortsoperator X im Heisenbergbild.

a) Berechnen Sie $C_{|\psi\rangle}(t)$ explizit für den Grundzustand $|\psi\rangle = |0\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators, $H = \hbar\omega\,(a^\dagger a + \frac12)$.

Hinweis: Benutzen Sie $X(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}tH} X \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}tH}$ und $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger)$ und $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$.

b) Bestimmen Sie $C^{-}_{|0\rangle}(t)$ aus $C_{|0\rangle}(t)$ und dessen komplex Konjugiertem, $C^{*}_{|0\rangle}(t)$.

Aufgabe K6 *Drei Fermionen mit Austausch-Wechselwirkung* (5 Punkte)

Drei identische Fermionen befinden sich in einem eindimensionalen Kastenpotential der Breite L mit unendlich hohen Wänden. Ohne Wechselwirkung lautet der Hamiltonoperator $H_0 = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{3}\vec{P}_i^2$, und die stationären Zustände $|\psi\rangle$ sind geeignete Linearkombinationen der Produktzustände $|n_1, n_2, n_3\rangle$ gebildet aus Ein-Teilchen-Zuständen $|n\rangle$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ und Energien $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ML^2}\,n^2$.

a) Je ein Fermion befinde sich in $|k\rangle$, $|\ell\rangle$ und $|m\rangle$ mit $k < \ell < m$. Geben Sie $|\psi\rangle$ an. Welche Energie $E = \langle\psi|H_0|\psi\rangle$ besitzt dieser Zustand?

b) Das Einschalten einer Wechselwirkung ändert $H_0 \;\rightarrow\; H = H_0 + H_I$ mit

$$H_I \;=\; \frac{\Delta}{2M}\,\big(\Pi_{12}\vec{P}_3^2 + \Pi_{23}\vec{P}_1^2 + \Pi_{31}\vec{P}_2^2\big) \qquad \text{und} \qquad \Delta \in \mathbb{R}\ ,$$

wobei $\Pi_{12}|n_1, n_2, n_3\rangle = |n_2, n_1, n_3\rangle$ etc.. Bestimmen Sie die Energie-Änderung $\langle\psi|H_I|\psi\rangle$.

Dauer: 180 Minuten **Summe: 30 Punkte** **Viel Erfolg!**