MAXWELLGLEICHUNGEN, LEGENDRE-POLYNOME

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H9] *Maxwellgleichungen* **[$4 + 4 + 4 = 12$ Punkte]**

Zwei verschwindend dünne und unendlich ausgedehnte Kondensatorplatten seien senkrecht zur x-Achse bei $x = d/2$ und $x = -d/2$ aufgestellt. Die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten ändere sich in einer solchen Weise, dass für $t > 0$ im Innenraum, $|x| < d/2$, das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha\, t\, \vec{e}_x$ erzeugt wird, d.h., der Kondensator werde gleichmäßig aufgeladen. Die Stromdichte $\vec{j}$ und die Ladungsdichte ϱ seien nur auf den Kondensatorplatten von Null verschieden.

(a) Bestimmen Sie für $t > 0$ aus den Maxwellgleichungen ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ im Innenraum. Nutzen Sie die Invarianz des Problems unter Verschiebungen in der yz-Ebene, um andere Lösungen $\vec{B}\,'$ zu erhalten. Wie unterscheiden sich diese?
Hinweis: Es löst $\vec{a} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \times \vec{r}$ die Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\omega}$ für konstantes ω.

(b) Modifizieren Sie die Innenraum-Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit geeigneten θ-Funktionen, um für $t > 0$ eine im ganzen Raum gültige Lösung zu erhalten, bei der die Felder im Außenraum verschwinden. Lesen Sie nun aus den relevanten Maxwellgleichungen die Ladungsdichte ϱ und die Stromdichte $\vec{j}$ ab und interpretieren Sie diese.
Hinweis: Es ist $\vec{e}_x \times \big(\vec{e}_x \times \vec{r}\big) = \vec{r}_\perp$.

(c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung.

[H10] *Ebene elektromagnetische Welle* **[$4 + 4 + 4 = 12$ Punkte]**

In der Coulombeichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ löst $\phi \equiv 0$ die Maxwellgleichungen im Vakuum, d.h. für $\varrho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$. Das Vektorpotential $\vec{A}$ erfüllt dann die homogene Wellengleichung.

(a) Weisen Sie nach, dass $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0\, f(t - x/c)$ mit einem konstanten Vektor $\vec{A}_0$ und einer beliebigen skalaren Funktion f eine Lösung der Wellengleichung ist. In welche Richtung $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, breitet sich die Welle aus?

(b) Benutzen Sie die Produkt- und Kettenregel, um aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\dot{\vec{A}}$ den Zusammenhang $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$ herzuleiten.

(c) Berechnen Sie sowohl den *Poyntingvektor* $\vec{S} := \frac{c}{4\pi}\,\vec{E} \times \vec{B}$, als auch die *Energiedichte* $w := \frac{1}{8\pi}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big)$ und überprüfen Sie damit, ob $\vec{S} = c\, w\, \vec{n}$ erfüllt ist. Welche physikalische Aussage beinhaltet diese Gleichung?

[H11] *Legendre-Polynome* **[$3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte]**

Die Legendre-Polynome P_k sind orthogonale Polynome, $\langle P_j | P_k \rangle = h_j\, \delta_{jk}$ mit $P_k(1) = 1$, die auf dem Intervall $[-1, +1]$ definiert sind. Bestimmen Sie die Polynome für $k \leq 3$ auf drei verschiedenen Wegen:

(a) Benutzen Sie die Rekursion $(k+1)\, P_{k+1}(x) = (2k+1)\, x\, P_k(x) - k\, P_{k-1}(x)$ mit $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$.

(b) Starten Sie von $P_0(x) = 1$ und berechnen Sie sukzessiv die höheren Polynome mit der Forderung nach Orthogonalität zu allen Polynomen kleinerer Ordnung sowie der Bedingung $P_k(1) = 1$. Beachten Sie bei der Auswertung der Integrale, dass $P_k(-x) = (-1)^k\, P_k(x)$.

(c) Benutzen Sie die *Formel von Rodrigues*: $P_k(x) = \frac{1}{2^k\, k!}\,\partial_x^k\,(x^2 - 1)^k$.

Die angegebene Formel von Rodrigues soll bewiesen werden.

(d) Offensichtlich ist $F_k(x) := \frac{1}{2^k\, k!}\,\partial_x^k\,(x^2 - 1)^k$ ein Polynom k-ten Grades. Man sieht leicht, dass $F_k(1) = 1$. Um die Übereinstimmung von F_k mit P_k nachzuweisen, reicht es aus, die Orthogonalität zu allen Legendre-Polynomen niedrigerer Ordnung zu zeigen. Integrieren Sie dazu den Ausdruck für $\langle F_k | P_\ell \rangle$, $\ell < k$, jeweils k-mal partiell. Beachten Sie bei den Randbeiträgen die spezielle Gestalt von F_k.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!