Exercitium V zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2020
Fourier-Reihen & Fourier-Transformation — Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Abgabe bis 14:00 am 26.05.2020 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

FOURIER-REIHEN & FOURIER-TRANSFORMATION

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H12] *Fourier-Reihen I* **[$8+4=12$ Punkte]**

Die Funktionen $f(x) = |x|$ und $g(x) = x^2$ seien außerhalb des Intervalls $I = [-\pi, +\pi)$ periodisch fortgesetzt.

(a) Bestimmen Sie ihre Darstellungen als Fourier-Reihen, einmal mit komplexen, einmal mit reellen Basisfunktionen.

(b) Werten Sie die Reihen für $x = 0$ aus, um zwei Summenformeln für π^2 zu erhalten. Kombinieren Sie diese zur Euler-Formel

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Hinweis: Für Tipps siehe Präsenzübung [P9].

[H13] *Fourier-Reihen II* **[$5+5+5=15$ Punkte]**

Die Funktion $f(x) = h\,\mathrm{e}^{-\beta\,x}\,\theta(a-x)$ mit $0 \le a \le L$ sei außerhalb des Intervall $I = [0, L)$ periodisch fortgesetzt.

(a) Welche Fourier-Koeffizienten c_n hat diese Funktion, und folglich welchen Mittelwert f_0 ?

(b) Ermitteln Sie für $\beta = 0$ den Mittelwert durch eine geometrische Überlegung. Liefert Ihr f_0 aus (a) im Limes $\beta \to 0$ den selben Wert?

(c) Setzen Sie nun $a = L$. Geben Sie die Koeffizienten $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = \mathrm{i}\,(c_n - c_{-n})$ an und schreiben Sie die reelle Fourier-Reihe explizit auf. Überprüfen Sie, ob mit $\beta \to \infty$ sämtliche a_n, b_n und c_n verschwinden. Mit welcher Potenz von β geschieht dies? Welcher Anteil hält sich demnach länger, der gerade oder der ungerade?

[H14] *Eigenschaften von Fourier-Reihen* **[$3+3+3=9$ Punkte]**

Die L-periodische Funktion $f(x)$ werde durch $f(x) = \sum_n c_n\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,n\,x/L}$ repräsentiert. Welche Fourier-Koeffizienten ergeben sich dann für die folgenden Funktionen?

(a) $f(x-a)$,

(b) $f'(x)$,

(c) $f^*(x)$. Was folgt damit für reellwertige Funktionen f ?

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

Bitte wenden!

[!] *Hinweise zu Computerübungen*
Die gesamte Lösung zusammen mit Erläuterungen und Diskussionen der Ergebnisse muss in einem *Mathematica*-Notebook verfasst werden. Sie haben für die Computerübung insgesamt 14 Tage Zeit.

Lesen Sie unbedingt noch einmal die allgemeinen Hinweise zu den Computerübungen durch, die Sie auf der Seite „Allgemeine Informationen" der Lehrveranstaltung im Stud.IP finden.

Beachten Sie, dass jeweils die Hälfte der maximal möglichen Punkte die Ausführung der Lösung der Computerübungen bewertet, also insbesondere, ob die Lösung gut strukturiert programmiert wurde, ob die Lösung eine vollständige Dokumentation im *Mathematica*-Notebook enthält, ob Plots vernünftig beschriftet sind, und ob Sie Ihre Resultate sinnvoll diskutieren und interpretieren.

[C2] *Fourier-Reihe und Fourier-Transformation* **[7 + 7 + 7 = 21 Computerpunkte]**
[CÜ] Ziel dieser Computerübung ist es, eine Routine zu erstellen, die für eine ihr übergebene Funktion deren Fourierreihe bis zu einer gegebenen Ordnung berechnet. Damit sollen Sie dann einige Vergleiche und Überlegungen anstellen.

(a) Erstellen Sie zunächst eine Routine, die als Argumente eine Funktion `f[t]` und eine positive Zahl `n` hat. Sie soll die Koeffizienten der reellen Fourierreihe, siehe Vorlesung Gleichungen (3.10) und (3.11), bis zur Ordnung `n` ausgeben. Der Einfachheit halber betrachten wir Funktionen im Intervall $I = [-\pi, \pi)$.

(b) Führen Sie für die unten angegebenen Funktionen Ihre Routine für $\mathtt{n} = 5$, $\mathtt{n} = 10$ und $\mathtt{n} = 20$ aus. Plotten Sie jeweils die Funktion und die resultierende Fourierreihe bis zu diesen Ordnungen. Vergleichen Sie so, wie gut oder schlecht die Fourierreihe die Funktion annähert. Verwenden Sie für diese Betrachtungen die folgenden Funktionen:

sinusartig $$f(t) = \begin{cases} \sin(t)\,\cos(t) & : -\pi \le t \le \pi \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

Sägezahn $$f(t) = \begin{cases} t & : -\pi \le t \le \pi \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

Rechteck $$f(t) = \begin{cases} 1 & : -1 \le t \le 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

Dreieck $$f(t) = \begin{cases} 1+t & : -1 \le t \le 0 \\ 1-t & : 0 \le t \le 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

(c) Erstellen Sie eine Routine, die die Fouriertransformation der Funktion `f[t]` berechnet. Die Funktion ist jetzt also auf $I = \mathbb{R}$ definiert. Erstellen Sie für die vier Funktionen aus (b) Plots, in denen das Fourierspektrum, also die Fourierkoeffizenten für den Fall $\mathtt{n} = 20$ und die Fouriertransformierte übereinander geplottet werden. Interpretieren Sie Ihr Resultat. Beachten Sie, dass die Funktionen außerhalb des Intervalls $-\pi \le t \le \pi$ identisch verschwinden, also nicht periodisch fortgesetzt werden.

Hinweis 1: Die nötigen Integrationen sind am besten numerisch durchzuführen. Die Routinen sind natürlich ohne Hilfe der in *Mathematica* eingebauten Befehle zur Fourierreihe und Fouriertransformation zu erstellen!
Hinweis 2: Auch wenn in den ersten beiden Aufgabenteilen nur das Intervall I eine Rolle spielt, ist es für die numerischen Integrationen hilfreich, die Funktionen mittels `Piecewise` außerhalb des Intervalls $I = [-\pi, \pi)$ als identisch null zu definieren. Für den dritten Teil der Aufgabe ist das auch notwendig, das wir sonst die Fourier-Transformierte nicht ohne weiteres mit *Mathematica* berechnen können.