Examinatio zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2020

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld

05. August 2020 — PD Dr. Michael Flohr

Name: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Studiengang: ____________________

#	E1	E2	E3	E4	E5	E6	Σ
Pkte							
Korr							

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Bearbeiten Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Der Test ist mit 30 oder mehr Punkten garantiert bestanden.

[E1] *Integralsätze* **[3 + 5 + 2 = 10 Punkte]**

Betrachten Sie die kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}) = \varrho_0\, \mathrm{e}^{-\alpha\, r^3}$ mit ϱ_0 und α reelle Konstanten, $\alpha > 0$.

(a) Bestimmen Sie ϱ_0 so, dass sich die Gesamtladung Q ergibt.
(b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes und skizzieren Sie die Funktion $|\vec{E}(r)|$.
(c) Geben Sie das Dipolmoment der Ladungsverteilung an.

[E2] *Zeitabhängige Felder* **[7 + 3 = 10 Punkte]**

Gegeben sei das elektrische Feld $\vec{E}(t,\vec{r}) \doteq \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + c\,t\,x \\ y^2 + c\,t\,y \\ z^2 - y^2 + c\,t\,z \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das magnetische Feld $\vec{B}(t,\vec{r})$ mit der Anfangsbedingung $\vec{B}(0,\vec{r}) = 0$, sowie eine Ladungsdichte $\varrho(t,\vec{r})$ und eine Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{r})$, so dass die Maxwell-Gleichungen erfüllt sind.
(b) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung für ϱ und $\vec{j}$ erfüllt ist.

[E3] *Ebene Wellen* **[3 + 4 + 3 = 10 Punkte]**

Im Vakuum hat das magnetische Feld $\vec{B}(t,\vec{x})$ einer ebenen, elektromagnetischen Welle die Form

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t\right).$$

Beantworten Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen im Vakuum, also für $\varrho \equiv 0$ und $\vec{j} \equiv 0$, die folgenden Fragen, wobei Sie Ihre Antwort herleiten bzw. begründen müssen:

(a) Welche Bedingung müssen die Amplitude $\vec{B}_0$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ erfüllen?
(b) Welchen Wert hat das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(t,\vec{r})$. *Hinweis*: Machen Sie für $\vec{E}$ einen Ansatz analog zu $\vec{B}$.
(c) Welchen Wert muss die Kreisfrequenz ω haben?

[E4] *Energie des elektrischen Feldes* **[10 Punkte]**

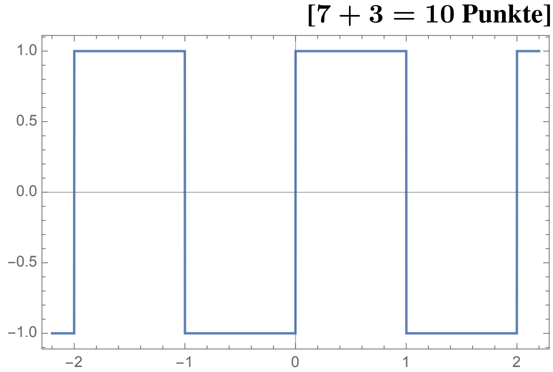
Die Energie des elektrischen Feldes ist durch $W = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3r\, \vec{E}\cdot\vec{E}$ gegeben. Schreiben Sie für einen der beiden Faktoren $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Welche zwei Terme ergeben sich daraus vermittels einer partiellen Integration? Welcher Term verschwindet aufgrund des Gaußschen Integralssatzes, wenn man annimmt, dass im Unendlichen kein elektrisches Feld herrscht? Verwenden Sie für den verbleibenden Term eine Maxwellgleichung, um W durch ein Integral über ϱ und ϕ auszudrücken.

[E5] *Fourierreihe* **[7 + 3 = 10 Punkte]**

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der nebenstehend abgebildeten periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 2n < x < (2n+1) \\ -1 & (2n+1) < x < (2n+2) \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Legen Sie bei der Integration das Intervall $I = [-1,+1]$ zu Grunde.
(b) Lesen Sie aus dem Parsevalschen Theorem eine Summenformel ab.



[E6] *Dipolstrahlung* **[5 + 5 = 10 Punkte]**

Der führende Beitrag einer Strahlungsquelle, die sehr klein gegenüber der betrachteten Wellenlänge ist, ist in der Fernzone durch $\vec{E}(t,\vec{r}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\, t}\, \vec{B}(\vec{r}) \times \vec{e}_r$ und $\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\, t} = \dfrac{1}{c^2}\, k^2\, \dfrac{1}{r}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\, t}\, (\vec{e}_r \times \vec{p})$ gegeben. Hierbei ist $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ und $\vec{p}$ ist das Dipolmoment.

(a) Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Energiestromdichte $\overline{\vec{S}(\vec{r})}$ des elektromagnetischen Feldes. *Hinweis*: Es ist $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\, \Re\mathrm{e}\big(\vec{E} \times \vec{B}^*\big)$.
(b) Integrieren Sie die Energiestromdichte über die Oberfläche einer Kugel mit Radius R. Welche Beobachtung machen Sie?