
ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

[P26] *Ebene Welle*

Eine ebene Welle sei durch

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \Re\mathrm{e}\,\vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(k\,z-\omega\,t)}\,, \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \Re\mathrm{e}\,\vec{B}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(k\,z-\omega\,t)}$$

mit $\vec{E}_0 = a\,\vec{e}_x + \mathrm{i}\,b\,\vec{e}_y$, $\vec{B}_0 = -\mathrm{i}\,b\,\vec{e}_x + a\,\vec{e}_y$ gegeben.

(a) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Maxwellgleichungen im Vakuum.

(b) Zeigen Sie, dass für alle Zeiten t gilt: $\left(\frac{E_x(t,\vec{r})}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t,\vec{r})}{b}\right)^2 = 1\,.$

[P27] *Gauß-Paket*

Zum Zeitpunkt $t = 0$ laute das elektrische Feld in einem ladungsfreien Raum

$$\vec{E}(0,\vec{r}) = a\,\vec{e}_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,x}\,\mathrm{e}^{-b\,k^2}\,, \qquad \dot{\vec{E}}(0,\vec{r}) = a\,\vec{e}_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,(-\mathrm{i}\,c\,k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,x}\,\mathrm{e}^{-b\,k^2}\,.$$

(a) Gilt $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$?

(b) Wie lautet das Feld zur Zeit t ?

(c) Berechnen Sie das Fourier-Integral explizit. *Hinweis*: $\int \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ (Gauß-Integral).

[P28] *Endlich ausgedehnte Welle*

Wir wollen eine (in guter Näherung) zirkular polarisierte ebene Welle beschreiben, die eine endliche Ausdehnung in x- und y-Richtung habe und in z-Richtung propagiere.

(a) Auf welches $a(x,y)$ führt der Ansatz $\vec{E}(t,\vec{r}) = \big(E_0(x,y)\,(\vec{e}_x \pm \mathrm{i}\,\vec{e}_y) + a(x,y)\,\vec{e}_z\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(k\,z-\omega\,t)}$?

(b) Zeigen Sie unter der Annahme, dass die Amplitudenmodulation $E_0(x,y)$ nur schwach ortsabhängig ist (die Ausdehnung der Welle in x,y-Richtung sei groß gegen die Wellenlänge), dass das obige $\vec{E}(t,\vec{r})$ sowie $\vec{B} = \mp\mathrm{i}\,\vec{E}$ in guter Näherung die Maxwellgleichungen erfüllen.