WS 2014/2015

Ergänzungen zur klassischen Physik: Solitonen, Monopole, Instantonen

Olaf Lechtenfeld

14.11.2014

Präsenzübung 2

P3: Der Higgs-Effekt in skalarer Elektrodynamik

Skalare Elektrodynamik ist gegeben durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \overline{D_\mu \phi} D^\mu \phi - U(\overline{\phi}\phi) \tag{1}$$

für ein komplexes Skalarfeld $\phi \in \mathbb{C}$ minimal gekoppelt an ein Maxwellfeld a_μ mit Feldstärke $f_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$. Hierbei lautet die kovariante Ableitung

$$D_\mu \phi \;=\; \partial_\mu \phi - i a_\mu \phi\,, \tag{2}$$

und für das Selbstwechselwirkungspotential wählen wir das Flaschenboden- (oder mexican hat) Potential

$$U(\overline{\phi}\phi) \;=\; \lambda \left(\overline{\phi}\phi - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 \;=\; \frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 \overline{\phi}\phi + \lambda (\overline{\phi}\phi)^2 \tag{3}$$

mit positiven Konstanten μ und λ. Gesucht sind die physikalischen Anregungen (Teilchen in der Quantenversion) und ihre Massen.

a) Ermitteln Sie die Vakuum-Mannigfaltigkeit $\mathcal{V} \in \mathbb{C}$. Welche Symmetrie ist wie gebrochen? Parametrisieren Sie die Vakuum-Konfigurationen.

   Hinweis: Polarkoordinaten. *Notation:* $v \;\coloneqq\; \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}$.

b) Die Theorie ist invariant unter lokalen (Eich-) Transformationen

$$a_\mu(x) \;\mapsto\; a_\mu(x) - i\partial_\mu \alpha(x) \quad \text{und} \quad \phi(x) \;\mapsto\; \mathrm{e}^{i\alpha(x)} \phi(x)\,. \tag{4}$$

   Verwenden Sie diese, um ϕ auf die positive reelle Achse einzuschränken.

c) Entwickeln Sie das eingeschränkte (= eichfixierte) ϕ um seine Vakuum-Konfiguration,

$$\phi(x) \;=\; v + \frac{1}{\sqrt{2}} h(x)\,, \quad \text{mit } h(x) \in \mathbb{R}\,, \tag{5}$$

   und setzen Sie (5) in (1) ein, um eine Lagrangedichte für a_μ und h zu erhalten.

d) Die Lagrangedichte sollte folgende Form haben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; &-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}+\frac{1}{2}M^2 a_\mu a^\mu+\frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h-\frac{1}{2}m^2h^2\\ &-\beta h^3-\gamma h^4+\delta h a_\mu a^\mu+\epsilon h^2 a_\mu a^\mu\;.\end{aligned} \tag{6}$$

Bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich die Parameter und interpretieren Sie diese.

e) Zählen Sie die physikalischen Feld-Freiheitsgrade in (1) und in (6). Was ist passiert?

f)* Ein sorgfältigeres Argument vermeidet die vorschnelle Eichfixierung auf $\phi \in \mathbb{R}_+$. Entwickeln Sie demnach ϕ uneingeschränkt um eine willkürlich gewählte Vakuum-Konfiguration, z.B. $\widehat{\phi} \;=\; v$,

$$\phi(x) \;=\; v+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta(x)+i\xi(x)\right) \tag{7}$$

mit "kleinen" reellen Feldern η und ξ. Setzen Sie (7) in (1) ein, um eine Lagrangedichte für a_μ, η und ξ zu erhalten. Betrachten Sie im folgenden nur die Terme bis zur quadratischen Ordnung in den neuen Feldern und lassen Sie den $f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$-Term außen vor.

- Zeigen Sie, dass die Terme ohne Ableitung von $\mathcal{O}(\xi)$ und $\mathcal{O}(\xi^2)$ verschwinden, aber Terme von $\mathcal{O}(\partial\xi)$ und $\mathcal{O}(\partial\xi\partial\xi)$ bleiben.
- Zeigen Sie, dass die Matrix der quadratischen Form für $(a_\mu, \partial_\mu\xi)$ einen Null-Eigenwert hat. Damit lassen sich diese drei Terme in <u>einem</u> Quadrat zusammenfassen.
- Tun Sie dies. Welche Eichtransformation eliminiert $\partial\xi$? Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (d).

* für Ambitionierte