WS 2014/2015

Ergänzungen zur klassischen Physik: Solitonen, Monopole, Instantonen

Olaf Lechtenfeld

09.01.2015

Präsenzübung 5

P8: Drehimpuls eines magnetischen Monopols

a) Ein Dirac-Monopol (magnetische Ladung g) und eine elektrische Punktladung (q) verharren im Abstand $2a$. Welche Kräfte üben sie aufeinander aus?

b) Berechnen Sie den gesamten Drehimpuls

$$\vec{L} \;=\; \int \mathrm{d}^3 r \; \vec{r} \times \Big(\vec{E} \times \vec{B}\Big)$$

des elektromagnetischen Feldes, mit

$$\vec{E} \;=\; \frac{q}{4\pi}\,\frac{\vec{r}+\vec{a}}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} \;=\; \frac{g}{4\pi}\,\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}\,,$$

wobei die Koordinaten so gewählt sind, dass $\vec{a} = a\,\vec{e}_z$.
Wie hängt $\vec{L}$ vom Abstand $2a$ ab?

Hinweise: $\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = r^2 \vec{a} - \vec{r}\cdot\vec{a}\;\vec{r}$. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten ($x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, z$). Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_0^{\infty} \mathrm{d}s\; s^3 [(s^2+t^2+1)^2 - 4t^2]^{-\frac{3}{2}} \;=\; 1\,.$$

c) Welche Bedingung an (q,g) folgt aus der Quantisierung des Drehimpulses, $L_z = \frac{n}{2}\hbar\,, \quad n \in \mathbb{Z}$?

P9: Ladungsgitter für Dyonen

a) Verallgemeinern Sie das Ergebnis von P8 c) für zwei Dyonen (q_1, g_1) und (q_2, g_2). Das Ergebnis ist nach Dirac (1931), Zwanziger (1968), Schwinger (1969) benannt.

b) Gegeben ein Elektron mit Ladungen $(q,g) = (e,0)$, finden Sie die allgemeine Lösung (q,g) der DZS-Bedingung.

c) Eine CP-Transformation bewirkt $(q,g) \to (-q,g)$. In welchen Fällen ist das Ladungsspektrum CP-invariant?

P10: Geladenes Teilchen im magnetischen Monopolfeld

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Punktteilchen (Masse m, elektrische Ladung q, Position $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$) im Feld eines im Ursprung befestigten magnetischen Monopols (Ladung g) lautet

$$m\ddot{\vec{r}} \;=\; q\,(\vec{v}\times\vec{B}) \;=\; \kappa\,\vec{v}\times\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{mit} \;\; \kappa \;=\; \frac{qg}{4\pi}\,. \tag{$*$}$$

a) Multiplizieren Sie ($*$) mit $\vec{v}$ und verifizieren Sie die Erhaltung der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}mv^2$.

b) Berechnen Sie die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\vec{L} = m\,\vec{r}\times\vec{v}$ unter Verwendung von ($*$) und der Identität $\dot{\vec{e}}_r = (r\,\vec{v} - \vec{e}_r\cdot\vec{v}\;\vec{r})/r^2$. Welche Größe $\vec{J}$ ist erhalten? Interpretieren Sie das Resultat mit P8.

c) Verifizieren Sie, dass $\vec{J}\cdot\vec{e}_r = -\kappa = \mathit{konstant}$. Was bedeutet dies geometrisch für die Teilchenbahn?

d) Bestimmen Sie $\vec{J}^{\,2}$ und zeigen Sie, dass $\vec{L}^2$ ebenfalls erhalten ist. Wie ändert sich $\vec{L}$ zeitlich?

e) Weisen Sie nach, dass $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = 2v^2 = \mathit{konstant}$. Welche Lösung ergibt sich daraus für $r(t)$?