Leibniz Universität
Hannover

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Dr. Pieter Naaijkens

Lie-Algebren und ihre Darstellungen in der Physik
Übung vom 29.04.2014

Übungsstunde 1

Aufgabe 1: Wurzelzerlegung von $\mathfrak{so}(5)$
In dieser Übung betrachten wir die Lie-Algbera $\mathfrak{so}(5) = \{X : X^T = -X\}$. Um die Wurzelzerlegung zu finden muss man erst eine Cartan-Unteralgebra finden. Die Standardbasis von $\mathfrak{so}(5)$ ist hier für nicht so geeignet, deswegen suchen wir erstmal eine andere Darstellung. Wir können zum Beispiel eine Basisänderung im Darstellungsraum machen mit eine invertierbare Matrize M. Die Matrizen in dem neuen Basis ergeben sich durch $MX'M^{-1} = X$, wo X die alte Matrizen sind. Bemerken Sie dass die Abbildung $X \mapsto M^{-1}XM$ die Struktur der Lie-Algebra behaltet, so dass wir ohne weiteres mit den neuen Matrizen arbeiten können.
Wir suchen Matrizen die das Bild von anti-symmetrische Matrizen sind. Es folgt dass $GX = -X^TG$ für solche Matrizen in der neuen Basis, wo $G = M^TM$. Wir wählen M so dass es gilt:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies läßt sich erklären als eine Wechsel von einer Metrik $G' = I$ auf eine neue Metrik G mit Signatur $(3, 2)$. Die Gleichung $X^TG = -GX$ wird gelöst durch Matrizen X wie

$$X = \begin{pmatrix} A & E & B \\ F & 0 & -E^T \\ C & -F^T & -A^T \end{pmatrix},$$

mit A, B, C zwei-bei-zwei Matrizen und $B^T = -B$, $C^T = -C$.

a.) Beweis dass diese Matrizen ein 10-dimensionalen Vektorraum bilden.

Wir werden den folgenden Basis verwenden:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{1+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-1-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-1+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerken Sie das $[H_1, H_2] = 0$. Man kann zeigen das H_1 und H_2 eine Cartan-Unteralgebra erzeugen.

b.) Berechnen Sie die Kommutatoren $[H_i, E_\alpha]$ und finden die Wurzeln. Skizzieren Sie zudem das Wurzelsystem.

c.) Berechnen Sie auch die Kommutatoren $[E_\alpha, E_\beta]$ der weiteren Basiselemente.

d.) Ermitteln Sie mit diesen Ergebnisse die adjungierte Darstellung.

e.) Die Killing-Form ist definiert durch $(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$ mit X, Y in der Lie-Algebra. Berechnen Sie (H_i, H_j) für $i, j = 1, 2$.

Der lineare Spann von H_1 und H_2 ist ein Vektorraum $\mathfrak{h}$. Die Killing-Form ist eine nicht-degenerierte Form auf $\mathfrak{h}$, so dass es für jedes Funktional ϱ auf $\mathfrak{h}$ ein Element H_ϱ in $\mathfrak{h}$ gibt so dass $\varrho(H) = (H_\varrho, H)$ für alle $H \in \mathfrak{h}$. Es seien α, β jetzt zwei lineare Funktionalen auf $\mathfrak{h}^*$, dann kann man ein definites Skalarprodukt definieren durch $\langle \alpha, \beta \rangle = (H_\alpha, H_\beta)$.

f.) Ermitteln Sie das Skalarprodukt auf $\mathfrak{h}^*$.

g.) Wählen Sie zwei primitive Wurzeln α, β und bestimmen Sie die Cartan-Matrix und das Dynkin-Diagramm.