Leibniz Universität
Hannover

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Dr. Pieter Naaijkens

Lie-Algebren und ihre Darstellungen in der Physik
Übung vom 08.07.2014

Übungsstunde 5

Aufgabe 7: Baker-Campbell-Hausdorff bis auf 3. Ordnung
Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel ist gegeben durch

$$\log(e^X e^Y) := Z = X + \int_0^1 g(e^{\operatorname{ad} X} e^{t \operatorname{ad} Y})(Y),$$

mit $g(z) = \frac{\log z}{1 - z^{-1}}$. Man kann diese Funktion entwickeln in z:

$$g(z) = 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{6}(z-1)^2 + \dots .$$

Wir werden diese Entwicklung verwenden um eine Annäherung von der BCH-Formel zu finden.

a.) Beweisen Sie das $(e^{\operatorname{ad} X} e^{t \operatorname{ad} Y} - I)^n$ nur Terme von Ordnung n oder höher in $\operatorname{ad} X$ (bzw. $\operatorname{ad} Y$) enthält.

b.) Entwickeln Sie $g(e^{\operatorname{ad} X} e^{t \operatorname{ad} Y})$ bis einschließlich 2. Ordnung in $\operatorname{ad} X$ bzw. $\operatorname{ad} Y$.

c.) Integrieren Sie die Annäherung von $g(e^X e^{tY})(Y)$ und zeigen Sie dass

$$\log(e^X e^Y) \approx (X+Y) + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \dots .$$

Das heißt, die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel kann völlig als Summe von Kommutatoren geschrieben werden.

d.) *Extra Aufgabe:* Entwickeln Sie $\log(e^X e^Y)$ bis einschließlich 3. Ordnung in X und Y um die gleiche Annäherung zu bekommen.

Aufgabe 8: Ein Gegenbeispiel
Gegeben seien folgende Matrizen:

$$X = \pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen dass es keine Matrix $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt mit $e^X e^Y = e^Z$.

a.) Berechnen Sie e^X, e^Y und $e^X e^Y$.

b.) Beweisen Sie dass eine Matrize Z wie gesucht Spur gleich null haben muss. Ermitteln Sie außerdem Z^2 und e^Z.

c.) Beweisen Sie dass es eine solche Matrix Z nicht gibt.

Aufgabe 9: Die Heisenberg-Gruppe
Die Lie-Algebra der Heisenberg-Gruppe ist gegeben durch

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Die Lie-Algebra hängt zusammen mit den *kanonischen Vertauschungsrelationen.* In der Tat, definieren wir

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{p}{i\hbar} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dann gilt es $[q,p] = i\hbar z$ und $[p,z] = [q,z] = 0$.
Das *Zentrum* $Z(\mathfrak{g})$ einer Lie-Algebra ist die Menge von Elementen $X \in \mathfrak{g}$ so dass $[X,Y] = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$. Ermitteln Sie das Zentrum von der Lie-Algebra der Heisenberg-Gruppe, und zeigen Sie dass $[X,Y] \in Z(\mathfrak{g})$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$. Verwenden Sie diese Ergebnisse um mit einer expliziten Berechnung zu zeigen dass

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Aufgabe 10: Ad und ad
Es seien Matrizen X, Y gegeben. Erinnern Sie sich das die adjungierte Abbildung $\operatorname{ad} X$ definiert ist durch $(\operatorname{ad} X)(Y) = [X,Y]$.

a.) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$(\operatorname{ad} X)^n(Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y (-X)^{n-k}.$$

b.) Beweisen Sie dass

$$e^{\operatorname{ad} X}(Y) = (\operatorname{Ad} e^X)(Y) := e^X Y e^{-X}.$$

Die letzte Gleichung ist die Definition von Ad.