5. Hausübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(abzugeben am Dienstag, 29.11.2016)

Aufgabe H10 *Bewegung im Gravitationspotential einer Kugel* (4.5 Punkte)

Ein Massenpunkt m bewege sich im Gravitationsfeld einer Kugel homogener Dichte mit Radius R. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ruht m im Abstand $a = r(t = 0) - R > 0$ von der Kugeloberfläche. Für Abstände $r < R$ kann sich m reibungsfrei innerhalb der Kugel bewegen. Diskutieren Sie die Bahnkurve $r(t)$ von m.
(a) Bestimmen Sie zunächst die potentielle Energie von m. ($V(r)$ für $r \geq R$ und $r \leq R$).
(b) Geben Sie die Bahnkurve $r(t)$ von m an, d.h. bestimmen Sie $t(r)$ für $r(t) \geq R$ und $r(t)$ für $r(t) \leq R$ vollständig zu den gegebenen Anfangsbedingungen.

Aufgabe H11 *Teilchen im Schwarzschild - Potential* (5.5 Punkte)

Die Bewegung eines Testteilchens der Masse m im Gravitationsfeld eines sphärisch symmetrischen statischen Sterns wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die Wirkung

$$S = -\frac{1}{2} m \int \mathrm{d}t \left\{ \dot{T}^2 (1 - \frac{r_0}{r}) - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right\}, \quad r_0 = \mathrm{const}\,,$$

beschrieben. Dabei sind $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ sphärische Ortskoordinaten, und $T(t)$ ist eine Uhr des Teilchens. Identifizieren Sie zyklische Koordinaten und bestimmen Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen. Finden Sie eine möglichst einfache Lösung der Lagrange-Gleichung für die Koordinate θ. Argumentieren Sie, dass die Lagrange-Funktion selbst eine Erhaltungsgröße ist und wählen Sie ihren Wert als $-\frac{1}{2}mc^2$. Verwenden Sie die so erhaltenen Ergebnisse, um eine einfache Gleichung für $\dot{r}$ aufzustellen. Vergleichen Sie diese mit der radialen Geschwindigkeit $\dot{r}$ im Newtonschen Fall, um die Konstanten zu bestimmen. Bestimmen sie das effektive Potential bis auf additive Konstanten. Was ist der Unterschied zum Newtonschen Fall?