5. Präsenzübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(zu bearbeiten am Dienstag, 22.11.2016)

Aufgabe P09 *Schwarzes Loch*

Das Außenraum-Gravitationsfeld eines sphärisch-symmetrischen Sterns wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die sogenannte Schwarzschild-Geometrie beschrieben. Testteilchen, also punktförmige Körper, deren Einfluss auf das Gravitationsfeld vernachlässigt werden kann, verspüren in dieser Geometrie das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = -\epsilon\frac{\gamma M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\gamma M L^2}{r^3}\,.$$

Hierbei wurden Einheiten gewählt, so dass für die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gilt. Die Masse des Sterns ist M, und L ist der Drehimpuls des Testteilchens, γ ist die Newtonsche Gravitationskonstante. Die Konstante ϵ hat den Wert 1 für massive Teilchen mit Einheitsmasse $m = 1$ und ist Null für masselose Teilchen (Photonen). Im Newtonschen Fall fehlt lediglich der dritte Term ($\sim \frac{1}{r^3}$).
Diskutieren Sie qualitativ die unterschiedlichen Orbits für massive Teilchen im Newtonschen wie im relativistischen Fall sowie für masselose Teilchen im relativistischen Fall. Bestimmen Sie die Radien $r(L^2)$ kreisförmiger Orbits und klassizieren Sie diese Bahnen als stabil bzw. instabil. Nähern Sie für den massiven relativistischen Fall die Radien für große Drehimpulse L und vergleichen sie das Ergebnis mit dem masselosen Fall. Was ind der minimale Radius und Drehimpuls für die Existenz einer stabilen Kreisbahn im massiven relativistischen Fall?
Hinweis: Auf einer kreisförmigen Bahn gilt $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} = 0$.
Bemerkung: V_{eff} wird in der Hausübung [H11] mit $r_0 = 2\gamma M/c^2$ abgeleitet.

Aufgabe P10 *Zwei Teilchen mit attraktivem Potential*

Zwei Teilchen wechselwirken über das attraktive Potential

$$V(r) = -\frac{gm}{2}\frac{1}{r^2}\,,$$

wobei r der Relativabstand, m die reduzierte Masse und g eine Kopplungskonstante ist.
(a) Wann sind Lösungen für $E < 0$ möglich?
(b) Bestimmen Sie für $E < 0$ den äußeren Umkehrpunkt $r_{\max}$.
(c) Für $t = t_0$ betrage der Relativabstand $r_{\max}$. Wie entwickelt sich der Abstand mit der Zeit? Wie sieht die Bahnkurve $r(\varphi)$ aus?
(d) Wie oft umrunden sich die Teilchen?
(e) Treffen sie sich in endlicher Zeit?
Hinweise:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,,\\ \ln(y+\sqrt{y^2-1}) &= \operatorname{arcosh} y\,.\end{aligned}$$