Klausur zur **Quantenfeldtheorie** 09. August 2012

Aufgabe 1 *Massenerzeugung* (2 Punkte)

Betrachten Sie die Yukawa- plus ϕ^4-Theorie für ein masseloses Fermion:

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \overline{\psi}\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi - g\,\phi\overline{\psi}\psi \qquad \text{mit} \quad V(\phi) = \tfrac{\lambda}{4!}\big(\phi^2 - v^2\big)^2 \;.$$

Wie groß ist der Vakuum-Erwartungswert $\langle\phi\rangle$ von ϕ ? Redefinieren Sie das bosonische Feld als Abweichung von diesem Vakuum-Wert, also $\phi = \langle\phi\rangle + \eta$. Drücken Sie $\mathcal{L}$ aus durch ψ und η. Verifizieren Sie, dass in den neuen Feldvariablen das Fermion massiv ist, und bestimmen Sie seine Masse.

Aufgabe 2 *Feldimpuls-Operator* (4 Punkte)

Für ein freies reelles Skalarfeld (im Schrödingerbild),

$$\phi(\vec{x}) \;=\; \int \mathrm{d}\widetilde{k}\,\big(a_{\vec{k}} + a^\dagger_{-\vec{k}}\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad \text{und} \qquad \pi(\vec{x}) \;=\; -\mathrm{i}\int \mathrm{d}\widetilde{p}\,\omega_p\,\big(a_{\vec{p}} - a^\dagger_{-\vec{p}}\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{p}\cdot\vec{x}}\;,$$

mit $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, ist der Gesamtimpuls in x^i-Richtung gegeben durch den Operator

$$P_i \;=\; -\int \mathrm{d}^3x\;\pi(\vec{x})\,\partial_i\phi(\vec{x})\;.$$

Schreiben Sie dies um in die Form $P_i = \int \mathrm{d}\widetilde{k}\,\big(\ldots\big)_i$ und berechnen Sie den Eigenwert auf dem Zustand $|\vec{q}\rangle = a^\dagger_{\vec{q}}|0\rangle$.

Aufgabe 3 *Chiralität* (2 Punkte)

Die Gamma-Matrizen genügen der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4 \qquad \text{mit} \quad (\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1) \quad \text{und} \quad \mu,\nu = 0,1,2,3\;.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix $\gamma^* := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ die Gleichungen $(\gamma^*)^2 = \mathbf{1}_4$ und $\{\gamma^*, \gamma^\mu\} = 0$ erfüllt. Beweisen Sie weiterhin, dass $P_\pm := \frac{1}{2}(\mathbf{1}_4 \pm \gamma^*)$ orthogonale Projektoren sind, d.h. $P_+^2 = P_+$ und $P_-^2 = P_-$ sowie $P_+P_- = 0 = P_-P_+$.

Aufgabe 4 *Feld-Kontraktionen* (5 Punkte)

Drücken Sie für ein freies komplexes Skalarfeld (im Heisenberg-Bild),

$$\phi(x) \;=\; \int \mathrm{d}\widetilde{k}\,\big[a_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + b^\dagger_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\big]\Big|_{k^0=\omega_k}\;,$$

$\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)\phi(z)\phi^\dagger(w)|0\rangle$ durch die Funktion $D_+(u) = \int \mathrm{d}\widetilde{k}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k u^0 + \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{u}}$ aus. Was ändert sich, wenn Sie statt dessen $\langle 0|N[\phi(x)\phi^\dagger(y)\phi(z)\phi^\dagger(w)]|0\rangle$ berechnen oder $\langle 0|T[\phi(x)\phi^\dagger(y)\phi(z)\phi^\dagger(w)]|0\rangle$?

Aufgabe 5 *Propagation in externem Feld* (3 Punkte)

Die Greensfunktion (Propagator) eines freien Klein-Gordon-Feldes in einem externen (klassischen) Feld $A(z)$ ist gegeben durch

$$\big[\Box_z + m^2 + A(z)\big]\,G_A(z,y) \;=\; \delta^{(4)}(z-y)\;.$$

Multiplizieren Sie diese Gleichung mit $G_0(x,z)$ und integrieren Sie über z. Mit Hilfe von $G_0\,[\overleftarrow{\Box} + m^2] = \delta$ erhalten Sie eine Integralgleichung für G_A. Durch Iteration bekommen Sie eine Entwicklung von G_A in Potenzen von A, die Sie bitte graphisch darstellen.

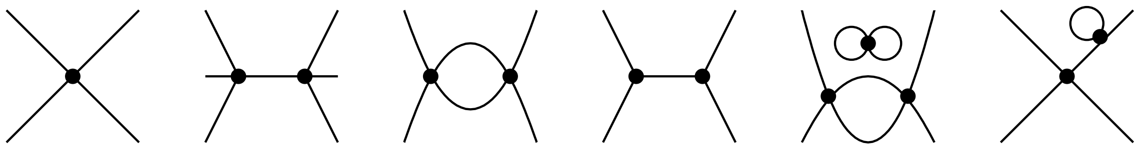
Aufgabe 6 *Feynman-Graphen* (5 Punkte)

Die ϕ^3-Theorie beschreibt ein reelles (massives) Skalarfeld mit einer Selbstwechselwirkung $S_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{3!}\int \mathrm{d}^4z\ \phi(x)^3$. Die Dysonsche Störungsreihe ist demnach aufgebaut aus Propagatoren und trivalenten Vertizes. Das erzeugende Funktional $Z[J]$ erzeugt die Greensfunktionen $G_n(x_1,\dots,x_n) = \langle\Omega|T[\phi(x_1)\dots\phi(x_n)]|\Omega\rangle$, welche in der Entwicklung in λ jeweils durch eine Summe von Feynman-Diagrammen dargestellt werden können.

Geben Sie für G_n mit $n = 0, 1, 2, 3$ jeweils diese Feynman-Diagramme (ohne kombinatorische oder Symmetrie-Faktoren) bis einschließlich Ordnung λ^2 an. Welche Diagramme überleben, wenn Sie zu $W[J] = -\mathrm{i}\ln Z[J]$ übergehen?

Aufgabe 7 *S-Matrix-Bausteine* (2 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Diagramme zur S-Matrix für einen $2 \to 2$ Streuprozess in der ϕ^4-Theorie beitragen. Begründen Sie jeden negativen Fall.



Aufgabe 8 *Ein-Loop-Divergenzen* (3 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrangedichte der Yukawa-Theorie,

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}M^2\phi^2 + \overline{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi - g\,\phi\overline{\psi}\psi\ .$$

Notieren Sie für die 1PI-Greensfunktionen $\Gamma_{\phi\phi}$, $\Gamma_{\overline{\psi}\psi}$ und $\Gamma_{\phi\overline{\psi}\psi}$ alle divergenten Ein-Loop-Graphen, bestimmen Sie deren superfizielle Divergenzgrade und geben Sie an, welche „nackte" Größe damit jeweils renormiert wird.

Aufgabe 9 *Anomale Dimensionen* (4 Punkte)

Der renormierte inverse Propagator eines Skalarfeldes mit Kopplung λ und Masse m sei

$$\mathrm{i}\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{\mathrm{R}}(p,\lambda_{\mathrm{R}},m_{\mathrm{R}},\mu) \;=\; p^2\big\{1-\alpha\lambda_{\mathrm{R}}^2\big(\ln\tfrac{p^2}{\mu^2}-1\big)\big\} \;-\; m_{\mathrm{R}}^2 - \alpha\mu^2\lambda_{\mathrm{R}}^2$$

mit einem numerischen Koeffizienten α. Verifizieren Sie die Renormierungsbedingungen

$$\mathrm{i}\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{\mathrm{R}}(\mu,\lambda_{\mathrm{R}},m_{\mathrm{R}},\mu) \;=\; \mu^2 - m_{\mathrm{R}}^2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{i}\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{\mathrm{R}}}{\partial p^2}(\mu,\lambda_{\mathrm{R}},m_{\mathrm{R}},\mu) \;=\; 1\ .$$

Bestimmen Sie aus der Callan-Symanzik-Gleichung

$$\Big(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda_{\mathrm{R}}} + \delta\, m_{\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial m_{\mathrm{R}}} - 2\gamma\Big)\,\mathrm{i}\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{\mathrm{R}}(p,\lambda_{\mathrm{R}},m_{\mathrm{R}},\mu) \;=\; 0$$

die anomalen Dimensionen $\gamma(\lambda_{\mathrm{R}},m_{\mathrm{R}})$ und $\delta(\lambda_{\mathrm{R}},m_{\mathrm{R}})$ in führender Ordnung in λ_{R}, wobei Sie annehmen dürfen, dass $\beta(\lambda_{\mathrm{R}},m_{\mathrm{R}}) = O(\lambda_{\mathrm{R}}^2)$ ist. Was ist nicht in Ordnung mit δ ?

Dauer: 180 Minuten **Summe: 30 Punkte** **Viel Erfolg!**