Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 12 **SoSe 2015** **Abgabe: 16.07.2015**

[H30] Sphärischer Potentialtopf (4 Punkte)

Gegeben sei das dreidimensionale Potential

$$V(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} -V_0 & \text{für } |\vec{r}| \leq R \\ \;\;0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad V_0 > 0 \quad \text{und} \quad R > 0\,.$$

(a) Machen Sie einen Separationsansatz für den Winkel- und Radialanteil der stationären Wellenfunktion und formulieren Sie die radiale Schrödingergleichung. Man überprüfe explizit, dass

$$j_0 \;=\; \frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_0 \;=\; -\frac{\cos z}{z}$$

mit geeignetem z Lösungen der radialen Gleichung für ℓ=0 sind.

(b) Wie lauten bei ℓ=0 die physikalisch erlaubten Wellenfunktionen der Bindungszustände im Innen- und Außenraum?

Hinweis: Im Außenraum wähle man zweckmäßigerweise die Hankelfunktionen $h_\ell^+ = j_\ell + \mathrm{i} n_\ell$ und $h_\ell^- = j_\ell - \mathrm{i} n_\ell$ als Basislösungen.

(c) Zeigen Sie, dass die Anschlußbedingung bei r=R auf folgende Gleichung führt:

$$\tan x \;=\; -\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \qquad \text{mit} \qquad x = \sqrt{\tfrac{2mR^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)} \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \tfrac{2m}{\hbar^2} V_0 R^2\,.$$

Diskutieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energie-Eigenwerte. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

[H31] Grundzustand des Wasserstoffatoms (3 Punkte)

Ein Wasserstoff-Elektron befinde sich im Grundzustand $|\psi\rangle$, der durch

$$\langle \vec{r}\,|\psi\rangle \;=\; (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}\; \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{r}|}{a_0}}$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$m beschrieben wird.

(a) Überzeugen Sie sich, dass die Wellenfunktion richtig normiert ist.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron im Inneren einer Kugel vom Radius a_0?

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Hamiltonoperators H und des Drehimpulses $\vec{L}$.

Bitte wenden

[H32] Starrer Rotator **(3 Punkte)**

Der Hamilton-Operator eines starren Rotators in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$H_0 \;=\; \frac{\hbar^2}{2\Theta}\vec{L}^2 \;+\; g\hbar\,\vec{B}\cdot\vec{L}\,,$$

wobei Θ das Trägheitsmoment und g das gyromagnetische Verhältnis bezeichnen. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass $\vec{B}$ in z-Richtung liegt und definieren Sie $\alpha = \frac{\hbar^2}{2\Theta}$ und $\beta = g\hbar|\vec{B}|$.

Es werde nun ein kleines zusätzliches Magnetfeld $\vec{B}' \propto \vec{e}_x$ eingeschaltet, so dass jetzt $H = H_0 + V$ mit $V = \gamma L_x$ und $\gamma \ll \beta$. Betrachten Sie den Rotator in einem ungestörten Zustand $|\ell m\rangle$.

(a) Berechnen Sie die Energie bis $O(\gamma^2)$ in Störungstheorie. Nutzen Sie dabei

$$L_x \;=\; \tfrac{1}{2}(L_+ + L_-) \qquad \text{und} \qquad L_\pm|\ell,m\rangle \;=\; \sqrt{(\ell{\pm}m{+}1)(\ell{\mp}m)}\,|\ell,m{\pm}1\rangle\,.$$

(b) Berechnen Sie die Energie exakt. Vergleichen Sie mit (a), indem Sie das Ergebnis der exakten Rechnung bis zur zweiten Ordnung in γ entwickeln.