Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 3 **SoSe 2015** **28./29.04.2015**

[P09] Exponentialfunktion von Pauli-Matrizen

Sei $\hat{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, α eine reelle Zahl und $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die drei Pauli-Matrizen. Man zeige die folgende Identität:

$$\exp(\tfrac{\mathrm{i}}{2}\, \vec{\sigma}\cdot \hat{n}\, \alpha) \;=\; \cos(\tfrac{\alpha}{2})\, \mathbb{1} + \mathrm{i}\, \sin(\tfrac{\alpha}{2})\, \vec{\sigma}\cdot \hat{n}\ .$$

Verwenden Sie dazu die Identität

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\,(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) \;=\; (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbb{1} + \mathrm{i}\,(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}\,.$$

[P10] Reine und gemischte Dichtematrizen

(a) Es sei eine Quelle gegeben, die Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen emittiert, die mit gleicher *Wahrscheinlichkeit* in positiver und negativer z-Richtung polarisiert sind. Wie lautet die zugehörige Dichtematrix ρ_1? Eine andere Quelle emittiere Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit in positiver und negativer x-Richtung polarisiert sind. Was ist hier die Dichtematrix? Wie erkennen Sie an den Dichtematrizen, dass es sich um ein *statistisches Gemisch* handelt?

(b) Eine weitere Quelle emittiere eine *Superposition*, die die gleiche Amplitude für Spin in positiver und negativer z-Richtung hat. Wie lautet hier die Dichtematrix, und wie erkennt man, dass es sich um einen reinen Zustand handelt? Betrachten Sie schließlich den Fall, dass eine Quelle eine Superposition emittiert, die die gleiche Amplitude für Spin in positiver und negativer x-Richtung hat.

(c) Wie groß ist in den vier Fällen jeweils die Wahrscheinlichkeit, bei einer Spinmessung in z-Richtung das Ergebnis $|\uparrow\rangle$ zu finden?

(d) Betrachten Sie nun zwei aufeinanderfolgende Messungen. Die Emission finde in y-Richtung statt, und die Teilchen durchlaufen zunächst einen in z-Richtung orientierten Stern-Gerlach-Apparat, dann einen in x-Richtung orientierten. Es gibt daher vier mögliche Auftreffpunkte auf einer hinter der zweiten Messung angebrachten Detektorplatte. Geben Sie für die vier oben beschriebenen Quellen jeweils die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Messergebnisse an, d.h. die relativen Intensitäten der Flecken auf der Detektorplatte.

[P11] Zeitentwicklung eines Zustands

Die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi(t)\rangle$ sei gegeben durch

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle \;=\; \Omega\,|\psi(t)\rangle$$

mit einem zeitunabhängigen Operator Ω. Die Lösung $|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|\psi(0)\rangle$ definiert einen Operator $\mathcal{U}(t)$. Leiten Sie eine Differentialgleichung für $\mathcal{U}(t)$ ab und lösen Sie diese. Was passiert, falls Ω zeitabhängig ist?