Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 3 | **SoSe 2018** | **Abgabe: 03.05.2018**

[H7] Pauli-Matrizen **(3 Punkte)**

Die Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma^1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\,(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) \;=\; (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbf{1} + \mathrm{i}\,(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}\,.$$

(b) Für $a_\mu = (a_0, \vec{a})$ und $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma})$ ist zu prüfen, dass

$$\operatorname{tr} a_\mu \sigma^\mu \;=\; 2a_0$$

und

$$\det a_\mu \sigma^\mu \;=\; a_0^2 - \vec{a}^2\,.$$

[H8] 2×2 Dichtematrizen **(4 Punkte)**

Jede 2×2 Dichtematrix kann wegen $\rho = \rho^\dagger$ und $\operatorname{tr}\rho = 1$ in der Basis $\{\sigma^\mu\}$ der hermiteschen 2×2 Matrizen parametrisiert werden als

$$\rho \;=\; \tfrac{1}{2} a_\mu \sigma^\mu \;=\; \tfrac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma})\,. \tag{1}$$

Andererseits wissen wir, dass es zwei orthonormierte Eigenkets $|+\rangle$ und $|-\rangle$ geben muss, so dass

$$\rho \;=\; p\,|+\rangle\langle+| \;+\; (1{-}p)\,|-\rangle\langle-| \qquad \text{mit} \quad 0 \le p \le 1\,. \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie $\det\rho$. Welche Bedingung an $\vec{a}$ folgt aus der Einschränkung $0 \le p \le 1$? Beschreiben Sie geometrisch die Menge aller Dichtematrizen (1).

(b) Geben Sie eine minimale Liste von Operatoren Ω_i an, aus deren gemessenen Erwartungswerten $\langle\Omega_i\rangle = \operatorname{tr}(\rho\,\Omega_i)$ Sie $\vec{a}$ ermitteln und damit ρ rekonstruieren können.

(c) Bestimmen Sie p als Funktion von $\vec{a}$. Finden Sie die Eigenkets $|+\rangle$ und $|-\rangle$ in der Parametrisierung (2).

(d) Schreiben Sie ρ^2 in der Darstellung (1). Wie groß ist $\operatorname{tr}\rho^2$?

(e) Diskutieren Sie den reinen Fall. Was geschieht mit den Ergebnissen (a)–(d)?

(f) Was passiert bei $\vec{a} = 0$?

Bitte wenden

[H9] Langlebige und kurzlebige Kaonen **(3 Punkte)**

Die in einem Experiment zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugten neutralen Kaonen oder Anti-Kaonen sind verschiedene Linearkombinationen der Zustände $|K_L\rangle$ und $|K_S\rangle$ (langlebige bzw. kurzlebige Kaonen), genauer:

$$|K^0\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_S\rangle + |K_L\rangle\big) \qquad \text{oder} \qquad |\overline{K}^0\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_S\rangle - |K_L\rangle\big)\,.$$

Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ hat sich ein langlebiger bzw. kurzlebiger Kaon-Zustand entwickelt gemäß

$$|K_S(t)\rangle \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_S t}|K_S\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad |K_L(t)\rangle \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t}|K_L\rangle\,,$$

wobei $\omega_S < \omega_L$. Hierbei bleibt der Zerfall der Kaonen unberücksichtigt! Sei nun $|\psi(t{=}0)\rangle \;=\; |K^0\rangle$. Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt t ein $\overline{K}^0$ zu finden (mit Skizze des Ergebnisses).