

# Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 4

SoSe 2024

23/24.04.2024

---

## [P12] Kommutatorrelationen und deren Konsequenzen

- (a) Man betrachte zwei lineare Operatoren  $A$  und  $B$ , die eine vollständige, orthonormale Menge von simultanen Eigenkets  $\{|a, b\rangle\}$  besitzen. Kann man daraus immer schließen, dass  $A$  und  $B$  miteinander kommutieren?

Wenn Ihre Antwort „Ja“ lautet, beweisen Sie Ihre Behauptung. Ist Ihre Antwort „Nein“, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- (b) Betrachten Sie zwei *nicht* miteinander kommutierende Operatoren  $A_1$  und  $A_2$ . Andererseits mögen diese Operatoren mit einem dritten Operator  $H$  kommutieren. Zeigen Sie, dass  $H$  mindestens einen entarteten Eigenwert hat.

## [P13] Ein hermitescher Differentialoperator

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) = k^2 u(x).$$

- (a) Für welche Werte von  $k$  erfüllen die Lösungen der obigen Dgl. die Randbedingungen  $u(0) = u(a) = 0$  mit  $a > 0$ ?
- (b) Seien  $u_n$  und  $u_m$  zwei Lösungen zu verschiedenem  $k$ , welche die Randbedingungen aus Punkt (a) erfüllen. Zeigen Sie, dass die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^a dx u_n(x) u_m(x) = 0$$

erfüllt ist.

## [P14] Fourier-Transformation

- (a) Sei  $\psi(x) = \delta(x-a)$ . Wie lautet die Fourier-Transformierte  $\tilde{\psi}(k)$ ?
- (b) Von  $\psi(x)$  sei die Fourier-Transformierte  $\tilde{\psi}(k)$  bekannt. Wie erhält man daraus die Fourier-Transformierte von  $x\psi(x)$ ?
- (c) Sei  $\psi(x) = g(x) + \int dy K(x-y)\psi(y)$ , wobei  $g$  und  $K$  bekannte Funktionen seien. Wie lautet die entsprechende Gleichung für  $\tilde{\psi}(k)$ ? (Gleich hinschreiben!)
- (d) Es gelte  $\psi(x+L) = \psi(x)$ . Wie folgt aus der Fourier-Transformation die Fourier-Reihe?

Zur Erinnerung die Konventionen zur Fourier-Transformation:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} \tilde{f}(k).$$