Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 5 **SoSe 2024** **30.04.2024**

[P15] Teilchen auf endlichem Intervall

Ein Teilchen kann sich nur auf der x-Achse zwischen zwei unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = L$ bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, es außerhalb anzutreffen, ist also Null.

(a) Was bedeutet dies für die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung? Geben Sie die Randbedingungen an. Zeigen Sie, dass der Operator P^2 auf solchen Wellenfunktionen hermitesch ist.

(b) Bestimmen Sie für den Hamiltonoperator $H = \frac{P^2}{2m}$ die Eigenwerte E_n und die normierten Eigenzustände $|n\rangle$ in der Ortsdarstellung.

(c) Berechnen Sie für den Zustand $|n\rangle$ die Erwartungswerte $\langle X\rangle$ und $\langle X^2\rangle$ sowie $\langle P\rangle$ und $\langle P^2\rangle$. überprüfen Sie die Unschärferelation $\mathit{\Delta} P \mathit{\Delta} X \geq \hbar/2$.

(d) Diskutieren Sie (a) für mögliche (?) alternative Randbedingungen $\psi(x{=}0) = 0$ und $\psi(x{=}L) = a$.

[P16] Zeitabhängige Wellenfunktion

Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m kann mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $U(t) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} tH)$ auf verschiedene Weisen bestimmt werden. Berechnen Sie $\psi(x, t)$ auf drei Arten für den Fall, dass das Teilchen für $t = 0$ einen scharfen Impuls k_0 hat, also

$$\langle x|\psi(0)\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}k_0 x)\,.$$

(a) Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach Eigenzuständen $|k\rangle$ des Hamilton-Operators H und verwenden Sie, dass

$$\langle k|\psi(t)\rangle = \exp\Big(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar} t\, E(k)\Big)\, \langle k|\psi(0)\rangle\,.$$

(b) Verwenden Sie nun die Relation

$$\langle x|\psi(t)\rangle = \int \mathrm{d}y\, \langle x|U(t)|y\rangle\langle y|\psi(0)\rangle\,.$$

Der Propagator eines freien Teilchens der Masse m in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar t}}\, \exp\Big(\frac{\mathrm{i}m(x-y)^2}{2\hbar t}\Big)\,.$$

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\, \mathrm{e}^{-\beta u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ für $\mathrm{Re}\beta \geq 0$.

(c) Benutzen Sie die alternative Darstellung

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \delta(x-y)\, \exp\Big(\tfrac{\mathrm{i}\hbar t}{2m} \partial_y^2\Big)\,.$$

Bleibt der Impuls scharf für $t > 0$?