2. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Dienstag, 26.04.2007)

Aufgabe H4 *Messungen an Spin-1-Teilchen* (5 Punkte)

Eine Quelle emittiere in y-Richtung ein statistisches Gemisch von Spin-1-Teilchen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 im Zustand $|0\rangle$ und in den Zuständen $|\pm 1\rangle$ sind (diese Basis bezieht sich auf die z-Richtung). Die Teilchen passieren zwei Stern-Gerlach-Apparate: der erste sei in x-Richtung orientiert, der zweite in z-Richtung. Dahinter sei eine Detektorplatte angebracht, auf der man die 9 möglichen Signale mit den Intensitäten $I_{m\mu}$ beobachtet. Der Index m bezeichnet das Resultat der ersten, μ das der zweiten Messung. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $W_{m\mu} = I_{m\mu}/I_m$ an, wobei $I_m = \sum_\mu I_{m\mu}$. Welcher der 9 Flecken verschwindet für exakt orthogonale Orientierung der Apparate?
Hinweise: Die Drehimpulsmatrizen für $S = 1$ sind:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Eine Drehung um die y-Achse wirkt auf die Spinoren vermöge der Matrix $\exp[\mathrm{i}\theta S_y]$.

Aufgabe H5 *Kommutatoren im Heisenbergbild* (5 Punkte)

Berechnen Sie für den eindimensionalen harmonischen Oszillator, d.h.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 \quad ,$$

die Kommutatoren

$$[p(t_1), p(t_2)] \quad ; \quad [p(t_1), x(t_2)] \quad ; \quad [x(t_1), x(t_2)] \tag{1}$$

für die Heisenbergoperatoren $x(t), p(t)$. Unterscheiden Sie die Fälle $t_1 \neq t_2$ und $t_1 = t_2$. Die Verknüpfung eines Operators im Heisenbergbild, $A(t)$, und im Schrödingerbild, A, ist gegeben durch

$$A(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} Ht} A\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} Ht} \; . \tag{2}$$

Hinweis: Stellen Sie mit Hilfe von (2) die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $x(t)$ und $p(t)$ auf und lösen Sie diese. Beachten Sie, daß für $t_1 = t_2$ aus (2) sofort die Kommutatoren (1) aus den entsprechenden Kommutatoren für die Schrödingeroperatoren folgen.

b.w.

Aufgabe H6 *Ehrenfest-Theorem* (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß für die nicht-relativistische Bewegung eines Elektrons (Ladung -e) im elektromagnetischen Feld (Skalarpotential Φ, Vektorpotential $\vec{A}$) gilt:

$$m\frac{d}{dt}\langle\vec{x}\rangle \;=\; \langle\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}\rangle\ .$$

Dabei ist $\vec{p}$ der kanonische Impuls.
Hinweise: Erinnern Sie sich, daß der Hamiltonoperator gegeben ist durch

$$H \;=\; \frac{1}{2m}(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A})^2 - e\Phi\ .$$

Zeigen und benutzen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

$$(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla+\frac{e}{c}\vec{A})^2\psi \;=\; -\hbar^2\nabla^2\psi + 2\frac{\hbar e}{\mathrm{i}c}\vec{A}\cdot\nabla\psi + (\frac{\hbar e}{\mathrm{i}c}\nabla\vec{A}+\frac{e^2}{c^2}\vec{A}^2)\psi$$

und

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{x}\rangle \;=\; \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle H\vec{x}-\vec{x}H\rangle\ .$$