6. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Donnerstag, 24.05.2007)

Aufgabe H15 *Depolarisierender Kanal* (5 Punkte)

Der sogenannte *depolarisierende Kanal* ist ein Modell für die Dekohärenz eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens mit gewissen Symmetrieeigenschaften. Mit der Wahrscheinlichkeit $p/3$ tritt jeder der drei folgenden Fehler auf:

- Spinflip: $|\psi\rangle_A \;\rightarrow\; \sigma_1 |\psi\rangle_A$
- Phasenfehler: $|\psi\rangle_A \;\rightarrow\; \sigma_3 |\psi\rangle_A$
- kombinierter Spin- und Phasenflip: $|\psi\rangle_A \;\rightarrow\; \sigma_2 |\psi\rangle_A$

wobei $\sigma_{1,2,3}$ die Pauli-Matrizen sind. Dieser Kanal kann nach Hinzunahme eines Umgebungs-Zustandsraums (Index E) mit Basis $\{|0\rangle_E, |i\rangle_E, i = 1, 2, 3\}$ durch einen unitären Operator U repräsentiert werden, der in folgender Weise auf den Spin-Zustand und die Umgebung wirkt:

$$U: \; |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_E \quad \longmapsto \quad \sqrt{1-p}\, |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_E \; + \; \sqrt{\tfrac{p}{3}} \sum_i \sigma_i |\psi\rangle_A \otimes |i\rangle_E \; .$$

a) Finden Sie die entsprechenden Kraus-Operatoren M_μ und bestätigen Sie, daß $\sum_\mu M_\mu^\dagger M_\mu = \mathbb{1}$. Wie transformiert sich ein allgemeiner reiner Zustand? Für welchen Wert von p wird aus einem reinen Zustand ein vollständiges Gemisch, d.h. $\varrho_A \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{1}_A$?

b) Wie verformt der depolarisierende Kanal die Blochkugel? Sie können hierzu die Wirkung des Kanals auf den Zustand $\varrho_A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + s \cdot \sigma_3)$ betrachten (d.h. die 3-Richtung in $\vec{s}$-Richtung wählen) und dann Symmetrieüberlegungen benutzen.

Aufgabe H16 *Phasendämpfung für den harmonischen Oszillator* (4 Punkte)

Als Modell für die Phasendämpfung des harmonischen Oszillators $(a, a^\dagger)$ dient folgende Kopplung an die Umgebung $(b, b^\dagger)$:

$$H_{\text{int}} \;=\; \Big(\sum_i \lambda_i\, b_i^\dagger b_i\Big)\, a^\dagger a \; .$$

Die Mastergleichung lautet im Wechselwirkungsbild

$$\hbar\, \dot{\varrho}_I \;=\; \Gamma \left(a^\dagger a\, \varrho_I\, a^\dagger a - \tfrac{1}{2}(a^\dagger a)^2 \varrho_I - \tfrac{1}{2}\varrho_I (a^\dagger a)^2 \right) ,$$

wobei Γ als Streurate der Umgebungs-Photonen bei einfacher Besetzung des Oszillators interpretiert werden kann.

a) Lösen Sie die Mastergleichung in der Besetzungszahlbasis $\{|n\rangle\}$: Schreiben Sie zunächst $\varrho_I = \sum_{n,m} \varrho_{nm} |n\rangle\langle m|$, stellen Sie dann eine Differentialgleichung für ϱ_{nm} auf, und integrieren Sie diese.

b) Nehmen Sie nun an, daß der Oszillator zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem "Schrödinger-Katzen"-Zustand

$$| \, \mathrm{cat} \, \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |n\rangle\big)$$

präpariert ist. Wie groß ist gemäß a) die Dekohärenzrate dieses Zustands, d.h. die typische Zeitskala für den Zerfall der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix?

Aufgabe H17 *Dekohärenz für einen Massenpunkt* (6 Punkte)

Die Dynamik der Dichtematrix eines freien Massenpunktes mit Dekohärenz wird beschrieben durch die Bewegungsgleichung (mit $\hbar$=1)

$$\mathrm{i}\,\partial_t \varrho(x, x', t) \;=\; \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varrho - \mathrm{i}\Lambda(x - x')^2 \varrho \;,$$

wobei Λ die Dekohärenz parametrisiert. Ein Lösungsansatz ist die (nicht normierte) Gaußsche Dichtematrix

$$\varrho(x, x', t) \;=\; \exp\Big\{-\Big[A(t)(x - x')^2 + \mathrm{i}B(t)(x - x')(x + x') + C(t)(x + x')^2\Big]\Big\} \;,$$

mit reellen Funktionen A, B, C. Es ist $\ell_x(t) := 1/\sqrt{8A(t)}$ die Kohärenzlänge, d.h. ein Maß für die Distanz, in der noch Quanteninterferenz gefunden werden kann. Die Ausdehnung des Wellenpakets im Ort ist gegeben durch $\Delta x(t) = 1/\sqrt{8C(t)}$.
Berechnen Sie $\ell_x(t)$ und $\Delta x(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ ein Gaußsches Wellenpaket der Breite b vorliegt, d.h.

$$\varrho(x, x', 0) \;=\; (2\pi b^2)^{-1/2} \exp\{-(x^2 + x'^2)/4b^2\} \;.$$

Skizzieren Sie $\ell_x(t)$ und $\Delta x(t)$ *qualitativ* für $\Lambda = 0$ und $\Lambda \neq 0$.

Anleitung: Benutzen Sie die sogenannte "k, Δ"-Darstellung für die Dichtematrix:

$$\varrho(k, \Delta, t) \;=\; \int \mathrm{d}y\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\, \varrho(y + \tfrac{1}{2}\Delta, y - \tfrac{1}{2}\Delta, t) \;.$$

In ihr hat die Bewegungsgleichung die einfachere Gestalt

$$\partial_t \varrho(k, \Delta, t) \;=\; \frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial \Delta}\varrho - \Lambda\, \Delta^2 \varrho \;.$$

Verwenden Sie den Lösungsansatz

$$\varrho(k, \Delta) \;=\; \exp\Big\{-\Big[c_1(t)k^2 + c_2(t)k\Delta + c_3(t)\Delta^2\Big]\Big\} \;,$$

wobei die $c_i(t)$ reell sind. Lösen Sie das gekoppelte System von Differentialgleichungen für $c_i(t)$. Der Zusammenhang der Koeffizienten in den beiden Darstellungen lautet:

$$A = c_3 - \frac{c_2^2}{4c_1} \;\;,\;\; B = -\frac{c_2}{4c_1} \;\;,\;\; C = \frac{1}{16c_1} \;.$$