8. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(zu bearbeiten am Donnerstag, 07.06.2007)

Aufgabe P13 *Mischungsentropie*

In der Vorlesung wurde bewiesen, daß

$$\mathrm{tr}\,(A \ln B) \;\leq\; \mathrm{tr}\,(A \ln A) \qquad\qquad (*)$$

für Operatoren A und B. Eine Mischung zweier Quantensysteme, beschrieben durch Dichteoperatoren ϱ_0 und ϱ_1, mit Anteilen $1{-}\lambda$ und λ ist gegeben durch

$$\varrho_\lambda \;=\; (1{-}\lambda)\,\varrho_0 \;+\; \lambda\,\varrho_1 \qquad \text{für} \quad \lambda \in [0,1]\;.$$

Schreiben Sie mit Hilfe von $(*)$ Ungleichungen für $\mathrm{tr}\,(\varrho_0 \ln \varrho_\lambda)$ und $\mathrm{tr}\,(\varrho_1 \ln \varrho_\lambda)$ und kombinieren Sie diese zu einer Abschätzung der von Neumann-Entropie $S(\varrho_\lambda) = -\,\mathrm{tr}\,(\varrho_\lambda \ln \varrho_\lambda)$ durch die Entropien der Teilsysteme ϱ_0 und ϱ_1. Wann wird die Ungleichung zur Gleichung?

Aufgabe P14 *Quantisierung im Phasenraum*

Jeder Funktion $f(q,p)$ im klassischen Phasenraum läßt sich im Hilbertraum eindeutig ein Operator F zuordnen durch die sogenannte Weyl-Ordnungs-Vorschrift

$$F \;=\; \text{symmetrische Ordnung von } f(q{\to}Q, p{\to}P) \qquad \text{mit} \quad [Q,P] = \mathrm{i}\hbar\mathbb{1}\;; \qquad (1)$$

z.B. wird $f = q^2 p$ zu $F = \frac{1}{3}(Q^2P + QPQ + PQ^2)$. Die (ebenfalls eindeutige) Umkehrung liefert für jeden Hilbertraum-Operator G (als Funktion der Operatoren Q und P) eine Phasenraum-Funktion

$$g_\hbar(q,p) \;=\; G_\star(Q{\to}q, P{\to}p)\;, \qquad (2)$$

wobei die Funktion $G_\star(q,p)$ aus der Funktion $G(q,p)$ dadurch entsteht, daß Produkte aus q und p mit dem neuen (nichtkommutativen Stern-)Produkt

$$q\star q \;=\; q^2\;, \qquad q\star p \;=\; qp + \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\;, \qquad p\star q \;=\; pq - \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\;, \qquad p\star p \;=\; p^2 \qquad (3)$$

zu bilden sind. Seine assoziative Erweiterung auf beliebige Funktionen lautet

$$\big(f\star g\big)(q,p) \;=\; f(q,p)\;\exp\Big\{\tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,(\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_q)\Big\}\; g(q,p)\;. \qquad (4)$$

An die Abhängigkeit von $\hbar$ erinnert in (2) die Notation $g_\hbar$.

(a) Entwickeln Sie das Stern-Produkt bis zur Ordnung $\hbar^2$ und identifizieren Sie die Ordnung $\hbar$. Welche Ordnungen sind symmetrisch oder antisymmetrisch?

(b) Verifizieren Sie mit (4) oder dem Ergebnis zu (a) die Produkte in (3).

(c) Prüfen Sie am Beispiel $f = q^2 p$, ob (2) tatsächlich die Umkehrung von (1) ist, d.h. ob die $\hbar$-Abhängigkeit herausfällt in $f \to F \to f_\hbar{=}f$.

(d) Welches ist die zum Hamilton-Operator $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ gehörige Phasenraum-Funktion $h_\hbar(q,p)$? Gilt $h_\hbar = h \equiv \frac{p^2}{2m} + V(q)$?

(e) Bilden Sie für eine Observable F die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F \;=\; \tfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,[F,H] \qquad\qquad (\partial_t F = 0)$$

via (2) auf den Phasenraum ab. Wie lautet der klassische Beitrag ($\hbar \to 0$), wie die führende Quantenkorrektur, falls $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ und $f_\hbar = f$?

(f) Können Sie die Lösung $f_\hbar(t)$ mit einer „Zeitentwicklungsfunktion“ angeben?