## 2. Hausübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(abzugeben am Dienstag, 04.05.2010)

Aufgabe H4 *Korrelierte Systeme* (6 Punkte)

Der Zustand zweier gekoppelter Qubits sei gegeben durch

$$|\psi\rangle \;=\; \Big(|0\rangle + |1\rangle\Big)_A \otimes \Big(0.4\,|0\rangle + 0.3\,|1\rangle\Big)_B \;+\; \Big(|0\rangle - |1\rangle\Big)_A \otimes \Big(0.3\,|0\rangle + 0.4\,|1\rangle\Big)_B \;.$$

a) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ normiert ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Observablen $\sigma_i \otimes \mathbb{1}$, $\mathbb{1} \otimes \sigma_i$ und $\sigma_i \otimes \sigma_j$.

c) Geben Sie die reduzierten Dichteoperatoren $\varrho_A$ und $\varrho_B$ an.

d) Bestimmen Sie die Schmidtzerlegung von $|\psi\rangle$.

Aufgabe H5 *Quantentest für Parastatistik* (5 Punkte)

In einem eindimensionalen harmonischen Oszillator befinden sich drei identische Teilchen mit Koordinaten $x, y, z$ und Impulsen $p_x, p_y, p_z$. Der Drei-Teilchen-Zustandsraum wird aufgespannt durch Zustände $|mnp\rangle$ in der Oszillator-Basis, wobei wir annehmen, dass nur die drei niedrigsten Zustände besetzt sind, d.h. $m, n, p \in \{0, 1, 2\}$. Zeigen Sie, dass die Zustände $|\Psi_\pm\rangle$ und $|\Phi_\pm\rangle$, mit

$$\begin{aligned}
|\Psi_+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|mnp\rangle + \omega\,|npm\rangle + \bar{\omega}\,|pmn\rangle\Big)\\
|\Psi_-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|nmp\rangle + \omega\,|pnm\rangle + \bar{\omega}\,|mpn\rangle\Big)\\
|\Phi_+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|nmp\rangle + \bar{\omega}\,|pnm\rangle + \omega\,|mpn\rangle\Big)\\
|\Phi_-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(|mnp\rangle + \bar{\omega}\,|npm\rangle + \omega\,|pmn\rangle\Big)
\end{aligned}$$

und $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$, im Prinzip experimentell unterscheidbar sind. Betrachten Sie dazu den (Drei-Teilchen-) Operator

$$A \;=\; xy\,(zp_z + p_z z) + zx\,(yp_y + p_y y) + yz\,(xp_x + p_x x)\;.$$

Argumentieren Sie, dass $\langle\Psi_+\,|A|\,\Psi_+\rangle \;=\; \langle\Psi_-\,|A|\,\Psi_-\rangle$. Zeigen Sie, dass hingegen der Erwartungswert von $A$ davon abhängt, ob das System im Zustand $|\Psi_+\rangle$ oder $|\Phi_+\rangle$ ist, d.h. $\langle\Psi_+\,|A|\,\Psi_+\rangle \neq \langle\Phi_+\,|A|\,\Phi_+\rangle$.

*Hinweise:* Überlegen Sie sich zunächst, für welche Zustände die Operatoren $x$ und $(xp_x + p_x x)$ nichtverschwindende Matrixelemente haben. Nutzen Sie die Symmetrie von $A$.

Aufgabe H6 *Fockraum für Para-Fermionen* (4 Punkte)

Betrachten Sie hypothetische Teilchen mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\left(a^\dagger\right)_{mn} = \left(a\right)_{nm} = \delta_{m,n+1}\sqrt{m(3-n)/3} \qquad \text{für} \quad 0 \le n, m \le 3\ .$$

Der Erzeugungsoperator $a^\dagger$ erzeugt also ein Teilchen, entsprechend vernichtet $a$ eines.

a) Zeigen Sie, dass $\left(a^\dagger\right)^4 = 0$.

b) Zeigen Sie

$$\left(a^\dagger a\right)_{mn} = \delta_{mn}\, m(4-m)/3 \qquad \text{und} \qquad \left(a\, a^\dagger\right)_{mn} = \delta_{mn}\,(m+1)(3-m)/3\ ,$$

und berechnen Sie die Matrixelemente des Teilchenzahloperators

$$N := \tfrac{3}{2}(a^\dagger a - a\, a^\dagger + \mathbb{1})\ .$$

Hat $N$ die „richtigen“ Eigenwerte?