3. Hausübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(abzugeben am Dienstag, 18.05.2010)

Aufgabe H7 *Kohärente Zustände für Fermionen* (4 Punkte)

Betrachten Sie kohärente Zustände für Fermionen: $|\xi\rangle = \exp(-\sum_i \xi_i b_i^\dagger)\,|0\rangle$. Hierbei sind die ξ_i Grassmann-Variablen.

a) Bestätigen Sie, daß $[\xi_i b_i^\dagger, \xi_j b_j^\dagger] = 0$. Zeigen Sie damit, dass der kohärente Zustand die folgende einfache Form besitzt:

$$|\xi\rangle = \prod_i (1 - \xi_i b_i^\dagger)\,|0\rangle \ .$$

b) Prüfen Sie, dass $|\xi\rangle$ tatsächlich ein kohärenter Zustand ist, d.h. dass $b_j\,|\xi\rangle = \xi_j\,|\xi\rangle$ gilt.

Aufgabe H8 *Depolarisierender Kanal* (5 Punkte)

Der sogenannte *depolarisierende Kanal* ist ein Modell für die Dekohärenz eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens mit gewissen Symmetrieeigenschaften. Mit der Wahrscheinlichkeit $p/3$ tritt jeder der drei folgenden Fehler auf:

- Spinflip: $|\psi\rangle_A \to \sigma_1\,|\psi\rangle_A$
- Phasenfehler: $|\psi\rangle_A \to \sigma_3\,|\psi\rangle_A$
- kombinierter Spin- und Phasenflip: $|\psi\rangle_A \to \sigma_2\,|\psi\rangle_A$

wobei $\sigma_{1,2,3}$ die Pauli-Matrizen sind. Dieser Kanal kann nach Hinzunahme eines Umgebungs-Zustandsraums (Index E) mit Basis $\{|0\rangle_E\,, |i\rangle_E\,, i = 1,2,3\}$ durch einen unitären Operator U repräsentiert werden, der in folgender Weise auf den Spin-Zustand und die Umgebung wirkt:

$$U:\ |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_E \quad \longmapsto \quad \sqrt{1-p}\,|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_E \ + \ \sqrt{\tfrac{p}{3}}\sum_i \sigma_i\,|\psi\rangle_A \otimes |i\rangle_E \ .$$

a) Finden Sie die entsprechenden Kraus-Operatoren M_μ und bestätigen Sie, dass $\sum_\mu M_\mu^\dagger M_\mu = \mathbb{1}$. Wie transformiert sich ein allgemeiner reiner Zustand? Für welchen Wert von p wird aus einem reinen Zustand ein vollständiges Gemisch, d.h. $\varrho_A \to \frac{1}{2}\mathbb{1}_A$?

b) Wie verformt der depolarisierende Kanal die Blochkugel? Sie können hierzu die Wirkung des Kanals auf den Zustand $\varrho_A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + s\cdot\sigma_3)$ betrachten (d.h. die 3-Richtung in $\vec{s}$-Richtung wählen) und dann Symmetrieüberlegungen benutzen.

Aufgabe H9 *Quantisierung im Phasenraum* (6 Punkte)

Jeder Funktion $f(q,p)$ im klassischen Phasenraum lässt sich im Hilbertraum eindeutig ein Operator F zuordnen durch die sogenannte Weyl-Ordnungs-Vorschrift

$$F \;=\; \text{symmetrische Ordnung von } f(q{\to}Q, p{\to}P) \qquad \text{mit} \quad [Q,P] = \mathrm{i}\hbar\mathbb{1}\ ; \tag{1}$$

z.B. wird $f = q^2p$ zu $F = \frac{1}{3}(Q^2P + QPQ + PQ^2)$. Die (ebenfalls eindeutige) Umkehrung liefert für jeden Hilbertraum-Operator G (als Funktion der Operatoren Q und P) eine Phasenraum-Funktion

$$g_\hbar(q,p) \;=\; G_\star(Q{\to}q, P{\to}p)\ , \tag{2}$$

wobei die Funktion $G_\star(q,p)$ aus der Funktion $G(q,p)$ dadurch entsteht, dass Produkte aus q und p mit dem neuen (nichtkommutativen Stern-)Produkt

$$q\star q \;=\; q^2\ , \qquad q\star p \;=\; qp + \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\ , \qquad p\star q \;=\; pq - \tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\ , \qquad p\star p \;=\; p^2 \tag{3}$$

zu bilden sind. Seine assoziative Erweiterung auf beliebige Funktionen lautet

$$(f\star g)(q,p) \;=\; f(q,p)\ \exp\Big\{\tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,(\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_q)\Big\}\ g(q,p)\ . \tag{4}$$

An die Abhängigkeit von $\hbar$ erinnert in (2) die Notation $g_\hbar$.

(a) Entwickeln Sie das Stern-Produkt bis zur Ordnung $\hbar^2$ und identifizieren Sie die Ordnung $\hbar$. Welche Ordnungen sind symmetrisch oder antisymmetrisch?

(b) Verifizieren Sie mit (4) oder dem Ergebnis zu (a) die Produkte in (3).

(c) Prüfen Sie am Beispiel $f = q^2p$, ob (2) tatsächlich die Umkehrung von (1) ist, d.h. ob die $\hbar$-Abhängigkeit herausfällt in $f \to F \to f_\hbar{=}f$.

(d) Welches ist die zum Hamilton-Operator $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ gehörige Phasenraum-Funktion $h_\hbar(q,p)$? Gilt $h_\hbar = h \equiv \frac{p^2}{2m} + V(q)$?

(e) Bilden Sie für eine Observable F die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F \;=\; \tfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,[F,H] \qquad\qquad (\partial_t F = 0)$$

via (2) auf den Phasenraum ab. Wie lautet der klassische Beitrag ($\hbar \to 0$), wie die führende Quantenkorrektur, falls $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ und $f_\hbar = f$?

(f) Können Sie die Lösung $f_\hbar(t)$ mit einer „Zeitentwicklungsfunktion“ angeben?