5. Hausübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(abzugeben am Dienstag, 22.06.2010)

Aufgabe H13 *Maximale Verletzung der CHSH-Ungleichung* (6 Punkte)

In der Präsenzübung P9 haben Sie die CHSH-Ungleichung kennengelernt. Beobachter 1 seien die Observablen $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}_1$ und $C = \vec{\gamma} \cdot \vec{\sigma}_1$ zugeordnet, Beobachter 2 die Observablen B und D (Spinmessung in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{\beta}$ bzw. $\vec{\delta}$). Die Messergebnisse seien a, b, c, d. Zeigen Sie, dass die maximale Verletzung dieser Ungleichung für ein Singlett zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen erreicht wird, wenn die aufeinanderfolgenden Messrichtungen $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ in einer Ebene liegen und sich jeweils um 45° unterscheiden.

a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass mit der Definition des Operators O

$$O = AB + BC + CD - DA$$

folgt:

$$O^2 = 4 + [A, C] \cdot [B, D] .$$

b) Die Norm eines Operators M ist definiert durch

$$||M|| = \sup_{|\psi\rangle} \frac{||M\,|\psi\rangle\,||}{||\,|\psi\rangle\,||} ,$$

mit $||\,|\psi\rangle\,||^2 = \langle\psi|\,\psi\rangle$. Diese Operatornorm hat die Eigenschaften

$$||MN|| \leq ||M|| \cdot ||N|| ,$$
$$||M + N|| \leq ||M|| + ||N|| .$$

Für diagonalisierbare Operatoren gilt ferner $||M^2|| = ||M||^2$. Geben Sie damit eine Obergrenze für die Norm des Operators O an (Cirel'son-Ungleichung). Zeigen Sie, dass diese Obergrenze durch die angegebenen Winkel erreicht wird.

b.w.

Aufgabe H14 *Paritätstransformation und Zeitumkehr* (4 Punkte)

a) Eine Paritätstransformation P ändert das Vorzeichen des Ortsvektors, d.h. die Ortswellenfunktion transformiert sich gemäß $(P\psi)(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$. Zeigen Sie, dass diese Transformation das Skalarprodukt erhält. Damit ist sie nach Wigner entweder unitär oder antiunitär (d.h. antilinear, $P(\alpha\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle) = \alpha^* P\,|\psi_1\rangle + \beta^* P\,|\psi_2\rangle$). Argumentieren Sie, dass P nicht antiunitär sein kann, indem Sie sich die Wirkung eines antilinearen P auf den stationären Zustand $|E,t\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\,|\psi\rangle$ eines Hamiltonoperators ansehen, dessen Spektrum nach unten begrenzt ist.

b) Unter einer Zeitumkehrtransformation wird die Dynamik eines Prozesses invertiert: aus dem Anfangszustand wird der Endzustand und umgekehrt. Zeigen Sie hiermit, dass die Zeitumkehr ein antiunitärer Operator sein muss. Betrachten Sie dazu die Zeitentwicklung
$$|\psi(t_2)\rangle \;=\; U(t_2,t_1)\,|\psi(t_1)\rangle\ .$$
Der zeittransformierte Zustand sei mit $|\psi^T(t)\rangle$ bezeichnet. Welche Zeitentwicklung muss die zeittransformierten Zustände $|\psi^T(t_1)\rangle$ und $|\psi^T(t_2)\rangle$ ineinander überführen? Zeigen Sie somit, dass
$$\langle\psi(t_2)|\,\psi^T(t_1)\rangle \;=\; \langle\psi(t_1)|\,\psi^T(t_2)\rangle$$
gelten muss, und folgern Sie hieraus die Antilinearität des Zeitumkehroperators.

Aufgabe H15 *Chiralität* (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass Lösungen der freien Diracgleichung
$$(\mathrm{i}\hbar\,\gamma^\nu\partial_\nu - mc)\psi = 0 \qquad\qquad \text{(Summe über } \nu = 0,1,2,3)$$
mit der zusätzlichen Chiralitätsbedingung
$$\psi \;=\; \tfrac{1}{2}(1\pm\gamma_5)\,\psi$$
masselose Teilchen (m=0) beschreiben.

b) Gewinnen Sie darstellungsunabhängig die Form des Hamiltonoperators für $m=0$,
$$H \;=\; -c\,\gamma_5\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\ .$$

Hinweise: Der Vektor $\vec{\Sigma}$ ist definiert über $\Sigma^1 = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^3$ und zyklisch. Es gilt außerdem
$$\gamma_5 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ \ ,\ \ \{\gamma^\nu,\gamma_5\} = 0\ \ ,\ \ (\gamma_5)^2 = \mathbb{1}\ \ ,\ \ (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}\ \ ,\ \ (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}\ \ ,\ i=1,2,3\ .$$