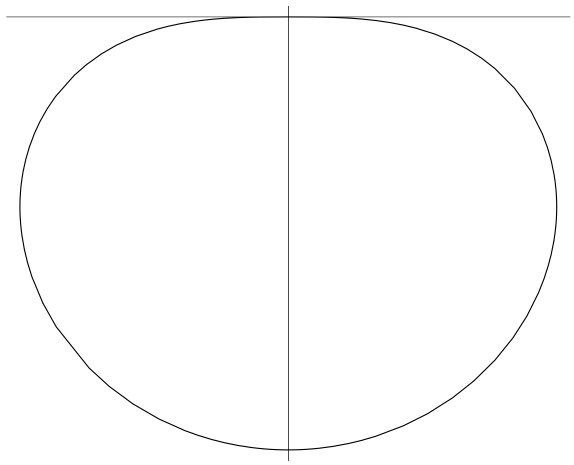
Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

22. 6. 2000 SS 2000

1. Asteroiden-Engineering — „Lechtenfeld's Surface"

Gesucht ist ein Körper mit homogener Massenverteilung und fester Gesamtmasse M aber noch unbekannter Gestalt mit der Eigenschaft, dass an einem Punkt der Oberfläche die Gravitation maximal wird.



(a) Legen Sie den Oberflächenpunkt in den Ursprung. Überzeugen Sie sich durch ein Symmetrieargument davon, dass die Oberfläche rotationssymmetrisch um die z-Achse ist. Es genügt also, einen Schnitt mit der xz-Ebene zu betrachten. Setzen Sie die Randkurve als $R(\theta)$ an, wobei θ den Winkel gegen die negative z-Achse bezeichnet.

(b) Durch welches Integral $F[R]$ wird die im Punkt 0 wirkende Gravitationskraft beschrieben? Mit welchem Integral $M[R]$ berechnet sich die Gesamtmasse M?

(c) Gesucht ist also eine Randkurve $\overline{R}(\theta)$, die das Funktional $F[R]$ maximiert, wobei nur solche Kurven zur Variation zugelassen sind, die auf die Gesamtmasse M führen. Beide Bedingungen lassen sich gleichzeitig erfüllen, indem man nach einem Extremum von $U[R] = F[R] - \lambda M[R]$ sucht, wobei λ eine (noch offene) reelle Konstante darstellt.

(d) Welche Gleichung ergibt sich für $\overline{R}(\theta)$ aus der Forderung nach einer verschwindenden Variation $\delta U = 0$? Die Lösung $\overline{R}_\lambda(\theta)$ enthält noch die Unbekannte λ. Bestimmen Sie diese Konstante λ, indem Sie mit dem erhaltenen $\overline{R}_\lambda(\theta)$ die Nebenbedingung auswerten.

(e) Wie hoch ist der Wert der der Oberflächen-Gravitation $F[\overline{R}]$? Vergleichen Sie mit einer Kugel gleicher Masse: $R_{\text{Kugel}}(\theta) = 2R\cos\theta$ mit $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$ ergibt $F_{\text{Kugel}} = \gamma m M/R^2 = \gamma m M\left(\frac{3M}{4\pi}\rho\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Ergebnis: $F[\overline{R}] \approx 1.028 F_{\text{Kugel}}$

(f) Rechnen Sie $\overline{R}(\theta)$ in kartesische Koordinaten um. Sie erhalten eine Kurve $K(x, z) = 0$ welchen Grades?