Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

19. 5. 2000 SS 2000

1. Eichung

Das Vektorpotential $\vec{A}$ eines gegebenen Wirbelfeldes $\vec{B}$, also $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, ist nicht eindeutig bestimmt, denn auf Grund von $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi(\vec{r})) = 0$ kann man zu $\vec{A}$ den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes addieren, ohne das Wirbelfeld zu verändern.
Betrachten Sie das konstante Wirbelfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_3$.

(a) Verifizieren Sie, dass $\vec{A}_1 = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ ein Vektorpotential zu $\vec{B}$ ist.

(b) Bestimmen Sie ein Skalarfeld χ so, dass $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}\chi$ in y-Richtung zeigt.

(c) Skizzieren Sie die beiden Vektorfelder $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$.

2. Greensfunktion

Die Greensfunktion ermöglicht, zu einer gegebenen linearen, inhomogenen Differentialgleichung eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Die Differentialgleichung habe die Gestalt

$$L(x(t)) := \sum_{k=0}^{n} a_k \, \partial_t^k x(t) = f(t)$$

mit dem linearen Differentialoperator L. Die Greensfunktion $G(t)$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung mit der speziellen Inhomogenität $f(t) \equiv \delta(t)$, d. h.

$$L(G(t)) = \delta(t).$$

Die Greensfunktion ist die „Antwort” des betrachteten Systems auf eine δ-artige Störung. Mit der Vorstellung von Ursache und Wirkung verlangt man von der Greensfunktion die Randbedingung* $G(t < 0) \equiv 0$.
Berechnen Sie die Greensfunktion $G(t)$, die für $t < 0$ verschwindet, für den harmonischen Oszillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. *Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst $G(t)$ zu Zeiten $t \neq 0$ als Lösung von $L(G(t)) = 0$ mit $G(t < 0) \equiv 0$. Verschaffen Sie sich verbliebene Konstanten, indem Sie die Differentialgleichung über das Intervall $[-\epsilon, +\epsilon]$ mit einem infinitesimalen $\epsilon > 0$ integrieren und anschliessend den Grenzwert $\lim_{\epsilon \to 0}$ betrachten. Machen Sie sich klar, dass bei diesem Grenzübergang nur Integranden mit Unstetigkeiten beitragen.

---

*Die Greensfunktion, die diese Randbegingung erfüllt, heisst auch *retardierte* Greensfunktion.