21. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 15. 5. 2000 vor der Vorlesung

61. Rotation

(a) Bei welcher Wahl der Konstanten wird die Strömung im Maschsee

$$\vec{v} \doteq (\alpha_1 x + (\beta - \gamma)y, (\beta + \gamma)x + \alpha_2 y, 0)$$

wirbelfrei?

(b) Zeigen Sie, dass die Forderung nach Wirbelfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes

$$\vec{v}(x, y) \doteq f(x)\,(y, x, 0)$$

die Funktion $f(x)$ bis auf einen konstanten Faktor festlegt.

(c) Zu welchem Wert der Konstanten α ist das Feld $(\alpha z\vec{r} - r^2\vec{e}_3)/r^5$ wirbelfrei? (Ursprung ausgenommen. Es handelt sich um das elektrische Feld eines Dipols am Ursprung.)

(d) Eine Strömung der Form $\vec{v}(\vec{r}) \doteq (0, v_2(\vec{r}), 0)$ soll die Wirbelstärke $\operatorname{rot}\vec{v} = \alpha\vec{e}_3\delta(x)$ haben. Bestimmen Sie $v_2(\vec{r})$ so allgemein wie möglich. Berücksichtigen Sie dabei eine etwaige y-Abhängigkeit von v_2. Auch die Forderung nach Quellenfreiheit legt v_2 noch nicht restlos fest. Skizzieren Sie zwei Strömungsbilder. (Es handelt sich um mögliche Magnetfelder an einem in y-Richtung stromdurchflossenen Blech auf der yz-Ebene.) (4)

62. Divergenz

(a) Der Maschsee aus Hausübung 61 (a) sei auch quellenfrei. Skizzieren Sie mit einigen repräsentativen Pfeilen $\vec{v}$ zu $\beta = 0$ und zu $\alpha_1 = \beta$.

(b) Zu welchem Wert der Konstanten α ist das Feld $(\alpha z\vec{r} - r^2\vec{e}_3)/r^5$ quellenfrei? (Ursprung ausgenommen. Es handelt sich *auch* um das Magnetfeld einer winzigen, stark stromdurchflossenen Spule am Ursprung: magnetischer Dipol.)

(c) Durch die kreisrunde Öffnung mit Radius R im Dach eines Tennisstadions regnet es (in infinitesimalen Tropfen) auf eine absolut ebene, ∞-ausgedehnte Plane. Das Wasser fließt radial nach aussen weg: $\vec{v} \doteq f(\rho)\vec{\rho}$. Dies ist ein zweidimensionales Problem mit der Polarkoordinate ρ. Gesucht ist $f(\rho)$ für das Gebiet $\rho < R$. In diesem Gebiet ist $\operatorname{div}\vec{v}$ konstant ($=: \alpha$), woraus sich eine Differentialgleichung für $f(\rho)$ ergibt. Die Lösung wird eindeutig durch die Überlegung: Kein Regen $\to$ keine Strömung. (4)

63. Eine Anwendung des Gradienten

Ein Experimentalphysiker hat in einer Messung die Abhängigkeit einer Größe y von der Größe x bestimmt und eine Menge von Datenpaaren (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, N$, erhalten. Eine Skizze suggeriert einen linearen Zusammenhang zwischen den beiden Größen, d. h. $y = f(x) = c_0 + c_1 x$. Der Physiker möchte nun die Koeffizienten c_0 und c_1 so bestimmen, dass die *Fehlerquadratsumme* $\sum_{k=1}^{N}(f(x_k) - y_k)^2$ minimiert wird. Können Sie ihm dabei helfen?

(a) Fassen Sie die Fehlerquadratsumme als eine reellwertige Abbildung $F(c_0, c_1)$ aus dem zweidimensionalen Raum der Koeffizienten (c_0, c_1) auf. Geben Sie mit Hilfe des Gradienten von F ein Kriterium für eine Extremwertstelle von F an.

(b) Es resultiert ein linearer Zusammenhang $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$, mit $\mu_i := \sum_{k=1}^{N} x_k^i\, y_k$. Welche Matrix M erhalten Sie?

(c) Berechnen Sie die Ausgleichsgerade für die Daten $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ und tragen Sie Daten und Gerade in ein Diagramm ein.

Hinweis: Verwenden Sie die Abkürzung $x^{(i)} := \sum_{k=1}^{N} x_k^i$. *Kontrolle*: $M^{-1} = \begin{pmatrix} x^{(0)} & x^{(1)} \\ x^{(1)} & x^{(2)} \end{pmatrix}$. (4)