25. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 13. 6. 2000 vor der Vorlesung

73. Fourierreihe einer periodischen Funktion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} h e^{-\beta x}\theta(a-x) & \text{für} \quad 0 < x < L, \\ L\text{-periodisch} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $0 \le a \le L$. Welche Fourierkoeffizienten c_n hat diese Funktion und folglich welchen Mittelwert f_0? Ermitteln Sie zu $\beta = 0$ den Mittelwert durch eine geometrische Überlegung. Bekommen Sie für $\beta \to 0$ den selben Mittelwert aus Ihrem f_0?

Geben Sie zu speziell $a = L$ die Koeffizienten $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n})$ an und schreiben Sie die reelle Fourierreihe explizit auf. Überprüfen Sie, ob mit $\beta \to \infty$ sämtliche a_n, b_n und c_n verschwinden. Mit welcher β-Potenz geschieht dies? Welcher Anteil hält sich demnach länger, der gerade oder ungerade? (4)

74. Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome P_k sind orthogonale Polynome $\langle P_i | P_j \rangle = h_i \delta_{ij}$ mit $P_k(1) = 1$ und Gewichtsfunktion $\rho(x) \equiv 1$. Bestimmen Sie die Polynome P_k bis $k = 3$, auf drei verschiedenen Wegen.

(a) Benutzen Sie die allgemeine Rekursionsformel $(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)$ mit $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$.

(b) Gehen Sie von $P_0(x) = 1$ aus und berechnen Sie sukzessiv die höheren Polynome durch die Forderung nach Orthogonalität zu allen Polynomen kleinerer Ordnung sowie die Bedingung $P_k(1) = 1$. Beachten Sie bei der Auswertung der Integrale die Symmetrie $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$.

(c) Benutzen Sie die *Formel von Rodrigues*: $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\partial_x^k (x^2-1)^k$.

Die angegebene Formel von Rodrigues soll allgemein bewiesen werden.

(d) Offensichtlich ist $F_k := \frac{1}{2^k k!}\partial_x^k (x^2-1)^k$ ein Polynom k-ten Grades. Um die Äquivalenz zu den Legendre-Polynomen nachzuweisen, reicht es aus, die Orthogonalität zu allen Legendre-Polynomen niedrigerer Ordnung zu zeigen. Integrieren Sie dazu $\langle F_k | P_\ell \rangle$, mit $\ell < k$, k-mal partiell. Beachten Sie bei der Ermittlung der Randbeiträge die spezielle Gestalt der F_k. (4)

Es geht noch weiter ☞

75. Fouriertransformation und Ganzzahlmultiplikation

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation ausgeführt werden kann. Betrachten Sie dazu die nebenstehende Multiplikationstabelle, in der die Multiplikation $p = n \cdot m$ der zweistelligen Zahlen n (Ziffern n_1, n_0) und m (Ziffern m_1, m_0) nach Grundschulart gezeigt ist. Das Ergebnis ist $p = 100 \cdot p_2 + 10 \cdot p_1 + p_0$, wobei die p_j mit $j = 0, 1, 2$ jeweils die Summen der entsprechenden Spalten sind.

$(n_1, n_0) \cdot (m_1, m_0)$		
		$n_0 \cdot m_0$
	$n_0 \cdot m_1$	
	$n_1 \cdot m_0$	
$n_1 \cdot m_1$		
p_2	p_1	p_0

(a) Überlegen Sie, zu welcher Spalte der Multiplikationstabelle ein bestimmtes Ziffernprodukt einen Beitrag liefert. Warum bilden die Teilsummen p_j eine Konvolution der Ziffern von n und m?

(b) Berechnen Sie nun die diskrete Fouriertransformierte $\tilde{z}$ einer vierstelligen Zahl z mit den Ziffern z_0, z_1, 0, 0 gemäß $\tilde{z}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{4} e^{jk\pi i/2} z_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{4} i^{jk} z_j$, mit $k = 0, \ldots, 3$ für $z = n$ und $z = m$. *Tipp*: Dies lässt sich bequem in Form einer Vektorgleichung $(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)^T = A\,(z_0, z_1, 0, 0)^T$ mit einer symmetrischen 4×4 Matrix $A = ?$ schreiben.

(c) Die Komponenten von $\tilde{p}$ ergeben sich nach dem Konvolutionstheorem als Produkt der jeweiligen Komponenten von $\tilde{n}$ und $\tilde{m}$, d. h. $\tilde{z}_k = \tilde{n}_k \cdot \tilde{m}_k$.

(d) Es verbleibt noch die Rücktransformation $p_j = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4} e^{-jk\pi i/2} \tilde{p}_k$ sowie das Aufsummieren. *Tipp*: Nach obiger Matrixnotation vollzieht sich die Rücktransformation mit der komplex konjugierten Matrix A^*. Erhalten Sie das erwartete Resultat? (4)

Hintergrund: Wie viele Rechenschritte (Multiplikationen, Additionen) benötigt die Ganzzahlmultiplikation mit der Fouriermethode? Deren Anzahl ist im Wesentlichen bestimmt durch die Matrix $\times$ Vektor Berechnungen. Bei einer Vektordimension N ist diese im Allgemeinen von der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$. Tatsächlich kann man jedoch zeigen, dass die Fouriertransformation mit lediglich $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ Operationen ausgeführt werden kann, die so genannte *Fast Fourier Transformation*. Damit ist die geschilderte Methode insbesondere interessant für Berechnungen mit langen Ganzzahlen z. B. $N \approx 10^7$. Mit einem N in dieser Größenordnung entspricht das Verhältnis von $\mathcal{O}(N^2)$ zu $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ Rechenschritten dem einer Rechenzeit von etwa zwei Wochen zu zwei Sekunden auf einem üblichen PC.