11. Hausübung zur Physik I Abgabe: Di 06.01.09

Aufgabe 41: Die Güte (Q-Faktor) eines Oszillators gibt die Schärfe des Resonanzmaximums an und ist definiert durch $Q = \frac{m\omega}{b}$. Betrachten Sie ein Fadenpendel mit punktförmiger Masse, einer Länge von 0.50 m und einem Gütefaktor $Q = 400$. Wie lange dauert es, bis eine als klein angenommene Amplitude um zwei Drittel abgefallen ist? (3)

Aufgabe 42: Bei einer gedämpften Schwingung wurde festgestellt, dass sich die Schwingungsamplitude nach einer Periode um 60 % verringerte und dass die Periodendauer $T = 0.5$ s betrug. Wie groß ist die Frequenz der ungedämpften Schwingung bei sonst gleichen Bedingungen? (2)

Aufgabe 43: Ein geladenes Teilchen (q, m) im homogenen und konstanten elektromagnetischen Feld $\vec{E} \doteq (0, E, 0)$ und $\vec{B} \doteq (0, 0, B)$ unterliege zusätzlich einer Reibungskraft $\sim \vec{v}$, so dass (4)

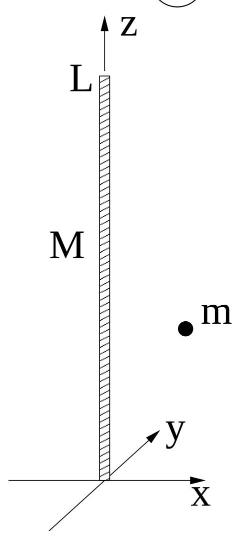
$$(*) \qquad m\dot{\vec{v}} \;=\; -m\gamma\,\vec{v} \;+\; q\vec{E} \;+\; q\vec{v}\times\vec{B} \quad ; \qquad \text{Startbedingung}: \quad \vec{v}(0) \;=\; \vec{0} \quad .$$

Gesucht sind $\vec{v}(t)$ und sein Grenzwert $\vec{v}_\infty := \lim_{t\to\infty} \vec{v}(t)$. Die Bewegung spielt sich in der xy–Ebene ab. Komponentenweise ist $(*)$ zwei gekoppelte Differenzialgleichungen: $\dot{v}_1 = \ldots$ und $\dot{v}_2 = \ldots$. Nach Multiplikation der zweiten mit i gewinnt man leicht *eine* Differenzialgleichung für $u := v_1 + \mathrm{i}v_2$. Aus deren Lösung $u(t)$ lassen sich $v_1(t)$ und $v_2(t)$ als Realteil bzw. Imaginärteil leicht ablesen. Nach genügend langer Zeit hat das Teilchen (dank Reibung) seinen Startvorgang vergessen; man kann demnach alternativ $\vec{v}_\infty =$ konst direkt algebraisch aus $(*)$ bestimmen.

Es handelt sich um den Hall-Effekt. *Vorschlag:* $\frac{qB}{m} =: \omega$, $\frac{qE}{m} =: \lambda$, $\sin\omega t =: s$, $\cos\omega t =: c$.

Aufgabe 44: Am 01.04.08 wurde erstmals ein stabförmiger Himmelskörper entdeckt. Er erstreckt sich auf der z-Achse von 0 bis L, hat eine infinitesimal idealisierte Ausdehnung in x- und y-Richtung und eine konstante lineare Massendichte $\sigma(z) =: \sigma_0 = M/L$. Welches Potenzial $V(\vec{r})$ durchfliegt sein Trabant mit Masse m? (7)

Zwischenergebnis: $\quad V(\vec{r}) \;\propto\; -\ln \frac{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}+L-z}{\sqrt{z^2+\rho^2}-z} \quad$ mit $\quad \rho^2 = x^2+y^2$.



Nach expliziter Berechnung von $V(\vec{r})$ interessieren wir uns für den Grenzfall eines in positive z-Richtung sehr langen Stabes $(L \to \infty)$, während die Koordinaten z und ρ des Trabanten endlich bleiben. Da der führende V-Term $(=: V_0)$ nicht von $\vec{r}$ abhängt, dürfen wir ihn subtrahieren (auch wenn er im Limes $L \to \infty$ divergiert). Es bleibt ein nur noch von $\sqrt{\rho^2+z^2} - z$, aber nicht mehr von L abhängiger Ausdruck für das Potenzial. Längs welcher Kurven in der xz-Ebene ist das Potenzial konstant (Skizze)? Wie nimmt es zu, wenn man sich bei fester Höhe $z > 0$ dem Stab nähert $(\rho \to 0)$? Und wie verhält es sich für kleine ρ bei negativen z?
Schließlich entfernen wir uns genau auf der z-Achse nach unten. $V(z) \to ?$ Welches asymptotische Verhalten bei $\rho = 0$, $z = -|z| \to -\infty$ hat dagegen plausiblerweise ein Stab endlicher Länge L?

Hinweis: Falls Sie hier oder in einer anderen Aufgabe ein Resultat aus einer Integral-Tafel verwenden, geben Sie die Quelle an *und* überprüfen Sie die dortige Angabe per Differenziation (vorführen!).

<<< Bitte umblättern für Bonus-Aufgabe! >>>

Bonus-Aufgabe: Man berechne für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c und konstanter Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ die Komponenten 5

$$I_{jk} \;=\; \int_V d^3r \;\; \rho(\vec{r})\; (\vec{r}^{\,2}\, \delta_{jk} \;-\; x_j x_k) \;=\; \int_V d^3r \;\; \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2{+}z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2{+}x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2{+}y^2 \end{pmatrix}_{j\,k}$$

des Trägheitstensors in Koordinaten längs der Quader-Achsen, und zwar

a) bezüglich einer Ecke des Quaders, also $V = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$.

b) bezüglich des Quader-Schwerpunkts, also $V = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \times [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$.

c) Die Differenz der beiden Matrizen aus (a) und (b) läßt sich in der Form $M(\vec{d}^{\,2}\delta_{jk} - d_j d_k)$ schreiben; für welche Masse M und welchen Vektor $\vec{d}$?

Der Tensor in (b) sollte Diagonalgestalt haben. Das Resultat (c) ist ein Beispiel des Satzes von Steiner.

Weihnachtsrätsel: $\quad -1 \;=\; \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} \;=\; \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \;=\; \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \;=\; \sqrt{+1} \;=\; +1 \qquad ???$

Schöne Feiertage und einen Guten Start ins Neue Jahr