3. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II Abgabe: Mo 20.04.09

Aufgabe 61: Von einem dreidimensionalen Magnetfeld $\vec{B}$ sei nur die verursachende elektrische Stromdichte $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ bekannt. Diese ist nur auf der xy-Ebene von Null verschieden und zeigt radial nach aussen: $\vec{j}(\rho,\varphi,z) = h(\rho)\,\delta(z)\,\vec{e}_\rho$ in Zylinderkoordinaten. Dabei variiert $\vec{j}$ in einer solchen Weise, dass der Strom $I = \int_Z \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{j}$ durch die Oberfläche Z eines Zylinders um die z-Achse unabhängig von deren Radius ist. 4

(a) Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{j}$, indem Sie h aus obiger Bedingung ermitteln. $\mathrm{d}\vec{f} = ?$

(b) Bestimmen Sie $\vec{B}$ aus dem Ansatz $\vec{B} = b_1(\rho)\,b_2(z)\,\vec{e}_\varphi$ mit $b_2(-z) = -b_2(z)$.

(c) Überprüfen Sie, ob $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ erfüllt ist.

Hinweise: In Zylinderkoordinaten: $\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho\partial_\rho + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\partial_\varphi + \vec{e}_z\partial_z$ und $\partial_\varphi\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho$.
Vorzeichen und Stufe: $\partial_z \mathrm{sgn}(z) = \partial_z\big(2\Theta(z)-1\big) = 2\,\delta(z)$.

Aufgabe 62: Eine Magnetfeld sei gegeben durch $\vec{B} \doteq \beta\,(z,x,y)$. Der Fluss I der Stromdichte $\vec{j} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$ durch eine Fläche S soll einmal direkt als Flächenintegral und einmal mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes berechnet werden. Dabei sei S ein kreisförmiges Stück einer Sattelfläche: $\vec{r}(u,v) \doteq (u,v,u^2{-}v^2)$ mit $u^2{+}v^2 \le R^2$. 4

Aufgabe 63: Als Anwendung des Gaußschen Integralssatzes soll das elektrische Feld $\vec{E}$ einer homogen geladenen Kugel im Ursprung mit Radius R und Gesamtladung Q berechnet werden, mit Hilfe der Beziehung $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\,\rho(\vec{r})$. 4

(a) Wählen Sie der Symmetrie des Problems angepasste Koordinaten und einen entsprechenden Ansatz für $\vec{E}$. Geben Sie die Ladungsdichte ρ mit Hilfe der Stufenfunktion an.

(b) Werfen Sie über beide Seiten der Beziehung ein Volumenintegral über eine Kugel K_r im Ursprung vom Radius r. Wandeln Sie die linke Seite gemäß dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral um, welches Sie auswerten.

(c) Machen Sie eine Fallunterscheidung zwischen $r{\le}R$ und $r{>}R$ und bestimmen Sie für beide Fälle nun auch die rechte Seite. Geben Sie das elektrische Feld innerhalb und außerhalb der geladenen Kugel an. Wie unterscheidet sich das Feld im Außenraum von demjenigen einer Punktladung Q im Ursprung?