5. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II	Abgabe: Mo 04.05.09

Aufgabe 67: Gegeben sei das elektrische Feld (6)

$$\vec{E}(t,\vec{r}) \;\doteq\; (\, ct\,x + x^2 - y^2\,,\; ct\,y + y^2\,,\; ct\,z + z^2 - y^2\,) \qquad \text{für} \quad \vec{r} \doteq (x,y,z)\ .$$

(a) Finden Sie ein zugehöriges magnetisches Feld $\vec{B}(t,\vec{r})$ mit $\vec{B}(0,\vec{r}) = \vec{0}$ sowie eine Ladungsdichte $\rho(t,\vec{r})$ und eine Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{r})$, so dass alle Maxwellgleichungen erfüllt sind. Überprüfen Sie auch die Kontinuitätsgleichung.

(b) Berechnen Sie explizit die Integrale

$$\oint_{\partial H} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{B} \quad , \qquad \partial_t \int_H \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E} \quad , \qquad \tfrac{4\pi}{c}\int_H \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{j}$$

für eine Halbkugel $H : (x{-}1)^2 + (y{-}1)^2 + z^2 = 1$ mit $z \geq 0$.

(c) Befragen Sie die integrale vierte Maxwellgleichung zur Konsistenz Ihrer Resultate.

Aufgabe 68: Die Maxwellgleichungen lassen sich mit Hilfe von Differenzialen elegant abkürzen. (6)
Dazu werden in Vierer-Notation mit Summationskonvention für $\mu,\nu,\ldots = 0,1,2,3$ eingeführt

$$\text{der Operator} \quad \mathrm{d} \;:=\; \mathrm{d}x^\mu\,\partial_\mu \qquad \text{und die 1-Form} \quad A \;:=\; A_\nu\,\mathrm{d}x^\nu\ .$$

(a) Das Produkt zweier Differenziale ist antisymmetrisch, also etwa $\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}x^\nu \mathrm{d}x^\mu$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{dd}f = 0$ für eine beliebige Funktion f. Gilt dies auch für die 1-Form A?

(b) Die Anwendung von d auf A ergibt die 2-Form

$$\mathrm{d}A \;=:\; F \;=\; \tfrac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \;=\; \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \qquad \text{mit} \quad F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}\ .$$

Drücken Sie $F_{\mu\nu}$ durch die A-Komponenten aus. Beziehen Sie F_{01} und F_{23} auf $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

(c) Aus (a) und (b) folgt automatisch $\mathrm{d}F = \mathrm{dd}A = 0$. Werten Sie von der 3-Form-Gleichung

$$0 \;=\; \mathrm{d}F \;=\; \tfrac{1}{2}\sum_{\rho,\mu,\nu} \partial_\rho F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\rho\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \;=\; \sum_{\rho<\mu<\nu} (\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu})\,\mathrm{d}x^\rho\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

(warum gilt die letzte Gleichheit?) die 123- und 012-Komponenten aus und drücken Sie das Ergebnis durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Welche Maxwellgleichungen erkennen Sie wieder?

(d) Die Dualitätsoperation ersetzt $\vec{E} \mapsto \widetilde{\vec{E}} = -\vec{B}$ und $\vec{B} \mapsto \widetilde{\vec{B}} = \vec{E}$. Dies definiert eine duale 2-Form $\widetilde{F} = \frac{1}{2}\widetilde{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ mit Komponenten

$$\widetilde{F}_{01} = F_{23}\ , \quad \widetilde{F}_{02} = F_{31}\ , \quad \widetilde{F}_{03} = F_{12}\ , \quad \widetilde{F}_{23} = F_{10}\ , \quad \widetilde{F}_{31} = F_{20}\ , \quad \widetilde{F}_{12} = F_{30}\ .$$

Schreiben Sie $(\mathrm{d}\widetilde{F})_{123}$ und $(\mathrm{d}\widetilde{F})_{012}$ als Funktion der $F_{\mu\nu}$ und schließlich von $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

(e) Aus der 1-Form $j := j_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ entsteht durch Dualisierung eine 3-Form $\widetilde{j}$ mit Komponenten

$$\widetilde{j}_{123} = j_0 = j^0 = c\,\rho\ , \quad \widetilde{j}_{023} = j_1 = -j^1\ , \quad \widetilde{j}_{031} = j_2 = -j^2\ , \quad \widetilde{j}_{012} = j_3 = -j^3\ .$$

Fassen Sie die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen in der Form $\mathrm{d}\widetilde{F} = \,?$ zusammen.

Hinweise: Die Komponenten von n-Formen sind total antisymmetrisch in ihren Indizes. $\partial_t = c\,\partial_0$, $\vec{\nabla} \doteq (\partial_i)$.
$\vec{A} \doteq (A^i) = -(A_i)$ und $\vec{j} \doteq (j^i) = -(j_i)$ sowie $\vec{E} \doteq (E_i) = (F_{0i})$ und $\vec{B} \doteq (B_i) = -(F_{jk})$ mit (ijk) zyklisch.