8. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II	Abgabe: Mo 25.05.09

Aufgabe 75: Die Schrödingergleichung für die komplexwertige Wellenfunktion ψ eines freien Teilchens (m) in einer Dimension lautet (4)

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi(x,t) \;=\; -\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2\psi(x,t)\;.$$

Wir wählen dimensionslose Einheiten: $m = 1$ und $\hbar = 1$. Eine (unnormierte) Lösung dieser Schrödingergleichung ist das Gaußsche Wellenpaket mit Impuls q:

$$\psi_q(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\widetilde{\psi}_q(k,t) \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{\psi}_q(k,t) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\{(k-q)^2+\mathrm{i}k^2t\right\}}\;.$$

Erwartungswerte von Funktionen des Ortes oder Impulses für diese Lösung sind definiert über

$$\langle f(x)\rangle \;:=\; \frac{\int\mathrm{d}x\;f(x)\,|\psi_q(x,t)|^2}{\int\mathrm{d}x\;|\psi_q(x,t)|^2} \qquad \text{und} \qquad \langle g(k)\rangle \;:=\; \frac{\int\mathrm{d}k\;g(k)\,|\widetilde{\psi}_q(k,t)|^2}{\int\mathrm{d}k\;|\widetilde{\psi}_q(k,t)|^2}\;.$$

(a) Berechnen Sie die Varianz $(\Delta k)^2 = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2$ des Impulses für das Wellenpaket.

Hinweise: Verschieben Sie die Integrationsvariable $k \to k{+}q$. $\int\mathrm{d}k\;\mathrm{e}^{-\alpha k^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. $-\partial_\alpha\int\mathrm{d}k\;\mathrm{e}^{-\alpha k^2} = ?$

(b) Wiederholen Sie die Rechnung für die Varianz $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ des Ortes.

Hinweise: Sie können ψ_q durch quadratische Ergänzung im Exponenten ausrechnen; Normierung egal. Einfacher ist es, die Fourier-Darstellung für ψ_q in die Formel einzusetzen:
$\int\mathrm{d}x\;f(x)\,\psi_q(x)\,\psi_q^*(x) = \int\mathrm{d}x\;f(x)\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\widetilde{\psi}_q(k)\int\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\,\widetilde{\psi}_q^*(k') = \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\ldots\,.$
Das x-Integral erledigen Sie mit $\int\mathrm{d}x\;x^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} = 2\pi\mathrm{i}^{-n}\partial_k^n\delta(k-k')$, dann partiell integrieren.

(c) Verifizieren Sie die Unschärferelation $(\Delta x)(\Delta k) = \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}$.

Aufgabe 76: Die Greensfunktionen gewöhnlicher Differenzialgleichungen lassen sich erraten: (3)

(a) Zeigen Sie dass $(\partial_t + \lambda)\,\Theta(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \;=\; \delta(t)$.

(b) Zeigen Sie dass $(\partial_t^2 + \Omega^2)\,\Theta(t)\,\frac{\sin\Omega t}{\Omega} \;=\; \delta(t)$.

Erinnerung: $\delta(t)\,f(t) = \delta(t)\,f(0)$ und $\int\mathrm{d}t\;\dot{\delta}(t)\,f(t) = -\int\mathrm{d}t\;\delta(t)\,\dot{f}(t) = -\dot{f}(0)$.

Aufgabe 77: Mit den Formeln aus Aufgabe 76 kann man zu höherdimensionalen Greensfunktionen vorstoßen. Wir attackieren die eindimensionale inhomogene Wellengleichung (5)

$$\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2\phi(x,t) \;-\; \partial_x^2\phi(x,t) \;=\; \rho(x,t)\;.$$

(a) Fourier-transformieren Sie die Wellengleichung bezüglich x (aber nicht t) und finden Sie eine gewöhnliche Differenzialgleichung (in t) für $\widetilde{\phi}(k,t)$ mit einer Inhomogenität $\widetilde{f}(k,t) = ?$.

(b) Nutzen Sie 76(b), um die Lösung darzustellen in der Form $\widetilde{\phi}(k,t) = \int\mathrm{d}t'\;G(t{-}t')\,\widetilde{f}(k,t')$.

(c) Transformieren Sie zurück, $\widetilde{\phi}(k,t) \to \phi(x,t)$ und $\widetilde{f}(k,t') \to f(x',t')$, so dass Sie eine Beziehung der Form $\phi(x,t) = \int\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}x'\;\widehat{G}(x{-}x',t{-}t')\,f(x',t')$ erhalten, mit $\widehat{G} = \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\ldots$.

(d) Berechnen Sie nun die Greensfunktion $\widehat{G}$ durch Erinnerung an die Fourier-Darstellung der Kasten-Funktion, $\Theta(x{+}a) - \Theta(x{-}a) = \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\frac{2\sin ka}{k}$.

(e) Interpretieren Sie das Resultat physikalisch (Ursache/Antwort) mit einer Skizze und erhalten Sie durch geeignete Substitutionen die Lösungsformel

$$\phi(x,t) \;=\; \tfrac{c}{2}\int_0^\infty\mathrm{d}s\int_{-cs}^{+cs}\mathrm{d}y\;\rho(x{-}y,t{-}s)\;.$$