10. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik II Abgabe: Mo 15.06.09

Aufgabe 81: Die zeitabhängige Temperaturverteilung $T(x,t)$ in einer Wand der Dicke R genüge der Diffusionsgleichung $\lambda^{-1}\partial_t T = \partial_x^2 T$ für $t \geq 0$ und $0 \leq x \leq R$, mit der Anfangsbedingung $T(x,0) \equiv 0$. Der linke Rand wird dabei stets auf T=0 gehalten, wogegen am rechten Rand zum Zeitpunkt t=0 ein Temperatursprung von 0 auf T_1 angelegt wird. (5)

(a) Machen Sie einen Separationsansatz $T(x,t) = \phi(x)\,f(t)$ und geben Sie die Lösungen für die (prinzipiell komplex-wertigen) Funktionen ϕ und f an in Abhängigkeit von der Separationskonstanten $-\alpha^2 \in \mathbb{C}$. Berücksichtigen Sie auch den Sonderfall $\alpha = 0$.

(b) Schränken Sie die erhaltenen Lösungen $\phi_\alpha(x)\,f_\alpha(t)$ durch die linke Randbedingung ein, getrennt für $\alpha{\neq}0$ und α=0.

(c) Erfüllen Sie nun die rechte Randbedingung für $\phi_0(R)\,f_0(t)$, aber die *homogene* Randbedingung $\phi_\alpha(R)\,f_\alpha(t) = 0$ für $\alpha{\neq}0$. Welche diskreten Werte α_n sind dann noch möglich?

(d) Wir verkürzen die Notation: $\phi_{\alpha_n} \to \phi_n$ etc. für $n = 1, 2, \ldots$. Die allgemeine Lösung ist eine Überlagerung $T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)\,f_n(t)$, welche nach Konstruktion beide Randbedingungen erfüllt. Die noch unbestimmten Koeffizienten der $n{\neq}0$ Beiträge (nennen wir sie b_n) erhalten Sie aus der Anfangsbedingung.

Hinweis: Sie dürfen ϕ_n antisymmetrisch auf das Intervall $[-R, R]$ erweitern und $2R$-periodisch fortsetzen. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\,f_n(0) = -\phi_0(x)\,f_0(0)$ ein Sägezahn, mit bekannter Fourier-Reihe (oder herleiten).

(e) Geben Sie die eindeutige Lösung nun vollständig an. Welches Temperaturprofil stellt sich für $t \to \infty$ ein? Skizzieren Sie einige Profile für endliche Zeiten.

Aufgabe 82: Die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ erfüllen die Differenzialgleichung (3)

$$[\,\Lambda + \ell(\ell{+}1)\,]\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \;=\; 0 \qquad \text{mit} \qquad \Lambda \;=\; \tfrac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta \sin\vartheta\,\partial_\vartheta + \tfrac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2 \;.$$

Die Funktionen $v(r,\vartheta,\varphi) := Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ und $w(r,\vartheta,\varphi) := Y_{\ell' m'}(\vartheta,\varphi)$ (mit trivialer radialer Abhängigkeit!) erfüllen homogene Neumann-Bedingungen am Rand einer Kugel K vom (beliebigen) Radius R. Demnach gilt $\langle v|\triangle w\rangle = \langle \triangle v|w\rangle$ mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \int_K \mathrm{d}^3r\, f^* g$. Zeigen Sie damit die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\; Y^*_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\,Y_{\ell' m'}(\vartheta,\varphi) \;=\; 0 \qquad \text{für} \quad \ell \neq \ell' \;.$$

Aufgabe 83: Man löse die homogene Wellengleichung $c^{-2}\partial_t^2 u = \triangle u$ im $\mathbb{R}^3$ mit Anfangswerten (4)

$$u(0,r,\vartheta,\varphi) \;=\; \tfrac{\sin 3r}{r} \qquad \text{und} \qquad \dot u(0,r,\vartheta,\varphi) \;=\; c\,(\sin\vartheta\,\sin\varphi + \cos\vartheta)\,\partial_r \tfrac{\sin 2r}{r} \;.$$

Hinweise: Starten Sie mit der allgemeinen (in $\mathbb{R}^3$ regulären) Lösung in Kugelkoordinaten.
Welche (k,ℓ,m)-Werte kommen in den Anfangsdaten vor? $j_\ell(\rho) = \rho^\ell(-\frac{1}{\rho}\partial_\rho)^\ell\,\frac{\sin\rho}{\rho}$.