Satz von Stokes

Gegeben ist mit $x^2+y^2+z^2 = 16$ eine Halbkugeloberfläche H über der xy-Ebene in kartesischen Koordinaten. Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das Oberflächenintegral $\int_H \mathrm{d}\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ für das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{r}) \;=\; (x^2+y-4)\vec{e}_x \;+\; 3xy\,\vec{e}_y \;+\; (2xz+z^2)\vec{e}_z \;.$$

Beweis von Theorem 3

In der Vorlesung wurde die Zerlegung eines dreidimensionalen Vektorfeldes $\vec{F} = \vec{F}_\ell + \vec{F}_t$ in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil behauptet, mit

$$\vec{F}_\ell(\vec{r}) \;=\; -\vec{\nabla} \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_t(\vec{r}) \;=\; \vec{\nabla} \times \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}'|} \;,$$

was der Rekonstruktion von $\vec{F}$ aus seinen Quellen und Wirbeln gleichkommt. Physikalisch steht in den beiden Zählern $4\pi\rho(\vec{r}')$ und $4\pi\vec{j}(\vec{r}')/c$, die Integrale heißen ϕ und $\vec{A}$, die beiden Anteile $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Beweisen Sie die Zerlegung in folgenden Schritten.

(a) Führen Sie für jedes Integral eine partielle Integration durch. Für $|\vec{r}'| \to \infty$ sollen die Felder so schnell abfallen, dass der Oberflächenterm keinen Beitrag liefert (Voraussetzung!).

(b) Verwenden Sie die Identität $\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \;=\; -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (warum gilt dies?). Sie können jetzt die Wirkung der inneren $\vec{\nabla}$ auf den gesamten Integranden ausdehnen (wieso?).

(c) Ziehen Sie jeweils den äußeren Nabla in das Integral und fassen Sie mit der Identität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \;=\; \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \triangle\,\vec{a}$ beide Integrale zusammen.

(d) Werten Sie mit Hilfe von $\triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ?$ das Integral aus.