Übungsklausur zu den RdP II

Bearbeitungsdauer: 60 min

1. Vektorfeld aus seinen Quellen und Wirbeln (3 Punkte)

Für ein quellenfreies Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = g(\vec{r})\vec{e}_z$ mit $\vec{v}(\vec{0}) = \vec{0}$ sind seine lokalen Wirbel $\vec{\nabla} \times \vec{v} \doteq 2\alpha\,(y, x, 0)$ bekannt. Bestimmen Sie $\vec{v}(\vec{r})$.

2. Eichung (4 Punkte)

Das Vektorpotenzial $\vec{A}$ eines gegebenen Wirbelfeldes $\vec{B}$ kann man durch Addition eines beliebigen Gradientenfeldes $\vec{\nabla}\chi$ abändern. Betrachten Sie das konstante Wirbelfeld $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_3$.

(a) Verifizieren Sie, dass $\vec{A}_1 = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ ein Vektorpotenzial zu $\vec{A}$ ist.

(b) Bestimmen Sie ein Skalarfeld χ so, dass $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}\chi$ in y-Richtung zeigt.

(c) Skizzieren Sie die beiden Vektorfelder $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$.

3. Differenzialgleichung (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) \;-\; 9\,y(x) \;=\; \mathrm{e}^{3x} + 1\ .$$

Ermitteln Sie zunächst die homogene Lösung. Benutzen Sie anschließend den Ansatz $y(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{3x} + g(x)$ mit Polynomen $f(x)$ und $g(x)$, um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Da es nur um eine spezielle Lösung geht, dürfen Sie die Polynome so einfach wie möglich wählen. Geben Sie schließlich die Lösung für die Anfangswerte $y(0) = 0$ und $y'(0) = \frac{1}{2}$ an.