Rechenmethoden der Physik II

Sonderübungen, Zettel 05 **Vorrechnung der Lösungen ab dem 08.09.2009**

[SÜ16]

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes. Verwenden Sie die Randbedingungen

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0\,,$$

sowie die folgende Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = \cos(7\pi x)\,.$$

[SÜ17]

1. Betrachten Sie die Wellengleichung $\Box f(\vec{r},t) = 0$ und machen Sie einen Separationsansatz $f(\vec{r},t) = g(t)h(\vec{r})$. Für welches $g(t)$ wird die Wellengleichung in eine Helmholtzgleichung für $h(\vec{r})$ überführt?
2. Lösen Sie diese Helmholtzgleichung für den Fall, dass die gesuchte Funktion $h(\vec{r})$ im Kasten $[0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ folgende Randwerte habe:

$$h(x_0,y_0,z_0) = d, \qquad \vec{\nabla} h(x_0,y_0,z_0) = 0$$
$$\text{für } x_0 \in \{0,a\}\,, y_0 \in \{0,b\}\,, z_0 \in \{0,c\}\,, a,b,c > 0 \quad .$$

3. Was ändert sich an der Lösung, wenn man die zweite Randbedingung abändert zu

$$\partial_x h(x_0,y_0,z_0) = \partial_y h(x_0,y_0,z_0) = 0, \quad \partial_z h(x_0,y_0,z_0) = \mathrm{i}\, d\,.$$

   Für welchen Wert von c existieren Lösungen?

[SÜ18]

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss und der Maxwellgleichungen das elektrische Feld eines homogen geladenen unendlich langen unendlich dünnen Drahtes, wobei Q die Ladung eines Drahtstückes der Länge l sei. Werten Sie hierzu das Flussintegral $\oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{E}$ für ein geeignetes Volumen V auf zwei verschiedene Weisen aus, um auf eine Gleichung für $|\vec{E}(\vec{r})|$ zu kommen und geben Sie schließlich das resultierende Feld $\vec{E}(\vec{r})$ an.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie der Problemstellung.

Bitte wenden

[SÜ19]

Wie Sie bereits wissen, kann man die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ einer Punktladung in einem Raumpunkt $\vec{r}_0$ mit Hilfe einer dreifachen Deltafunktion

$$\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

ausdrücken. Homogen geladene Geraden und Flächen werden analog (mit zwei bzw. einer Deltafunktion) beschrieben. Betrachten Sie nun eine unendlich ausgedehnte, homogen geladene Fläche mit Flächenladung σ im dreidimensionalen Raum und bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ sowie das skalare Potential $\phi(\vec{r})$ dieser Ladungsverteilung.

Hinweis:

$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{b^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}, \quad \int \mathrm{d}x \frac{1}{x^2+b^2}=\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}$$