Rechenmethoden der Physik II

Sonderübungen, Zettel 03 **Vorrechnung der Lösungen ab dem 25.08.2009**

[SÜ9]

Bestimmen Sie analog zur Sägezahnfunktion die Fourierreihenentwicklung der periodisch fortgesetzten Funktionen

1. $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$, periodisch auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ und $c = a + \mathrm{i}b$, $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{Z}$, gerade, sowie
2. $h(x) = \cosh x$, periodisch auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$

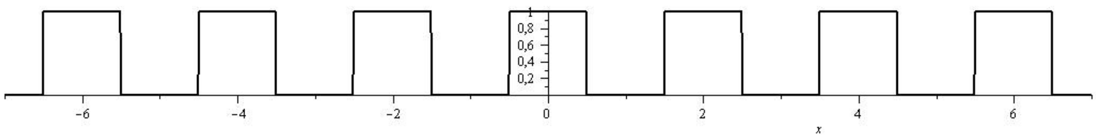
[SÜ10]

In der Vorlesung hatten Sie bereits gesehen, wie sich die Kastenfunktion Fouriertransformieren lässt. Diese Situation kann physikalisch als (Fraunhofersche) Beugung am Spalt interpretiert werden. Hierbei ist die resultierende Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von k proportional zur Fouriertransformation der Durchlässigkeit des Spaltes (im Beispiel der Kastenfunktion aus der Vorlesung ist die Durchlässigkeit gerade 100 Prozent auf dem Intervall $[-a/2, a/2]$ und Null sonst). Um die Intensitätsverteilung auf dem Schirm zu erhalten, könnte man hier k in Abhängigkeit vom Winkel des Spaltes zum entsprechenden Punkt auf dem Schirm ausdrücken.

Verallgemeinern Sie die Situation der Vorlesung nun auf ein Gitter mit $N = 2n+1$ Spalten (ein Spalt liege genau mittig auf der y-Achse) der Breite a, die jeweils den Abstand b (von Mittelpunk zu Mittelpunkt, also natürlich $b > a$) zueinander haben und bestimmen Sie das Fraunhofersche Beugungsbild (Fouriertransformation) in Abhängigkeit von k für die folgenden Fälle:

1. Die Durchlässigkeit der Spalten ist konstant 1, also wie in der Kastenfunktion der Vorlesung, $f(x) = 1$ für $x \in$ Spalt und $f(x) = 0$ für $x \notin$ Spalt.

   Beispielabbildung für den Fall $a = 1,\ b = 2$:



   Hinweis: Nutzen Sie folgende Identität:

$$\sum_{m=1}^{M} \cos m\alpha = \frac{\sin\left(\frac{M+1}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{M}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - 1\,,$$

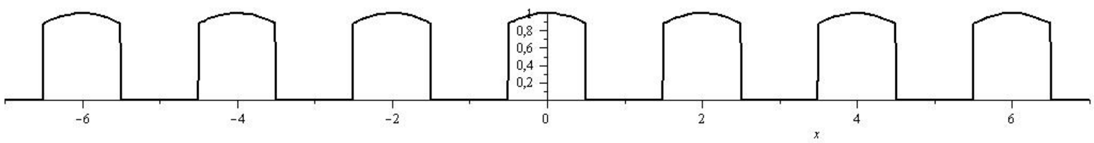
   sowie die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen. Ihr Ergebnis sollte wie folgt aussehen:

$$\tilde{f}(k) = \frac{2\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\sin\left(\frac{Nkb}{2}\right)}{k\sin\left(\frac{kb}{2}\right)}$$

Bitte wenden

2. Die Durchlässigkeit der Spalten ist nicht gleichmäßig, sondern verhält sich wie ein Kosinus, welcher sein Maximum in der Mitte des jeweiligen Spaltes hat, also für x im m-ten Spalt gilt: $f(x) = \cos(x - mb)$. Hierbei sei zusätzlich $a < \pi$

   Beispielabbildung für den Fall $a = 1,\ b = 2$:

   Leiten Sie zunächst den allgemeinen Ausdruck für das Beugungsbild her und vereinfachen Sie diesen dann für den Fall, dass $b = 1$. Beginnen Sie hier mit nur einem Spalt und verallgemeinern Sie diese Situation auf N Spalten. Ihr Ergebnis für N Spalten mit der Vereinfachung $b = 1$ sollte wie folgt aussehen:

$$\tilde{f}(k) = \frac{2}{k^2 - 1}\left(k\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{ka}{2}\right) - \sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{ka}{2}\right)\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{Nk}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k}{2}\right)}\right)$$

   .

   Hinweis: Nutzen Sie auch hier den zur ersten Teilaufgabe gegebenen Hinweis.

[SÜ11]

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$K(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}\sin\Omega_1 t - B\mathrm{e}^{-\gamma_2 t}\sin\Omega_2 t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

mit den konstanten reellen Parametern $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ B$