IV. TENSOREN

IV.1 Drehungen und Matrizen

betrachte 2 Koordinatensysteme:

alt: $\{\vec{e}_i \; , i=1,2,3\}$ | $\vec{r} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y + \vec{e}_3 z \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{r}$

neu: $\{\vec{f}_i \equiv \vec{e}_i{}' \; , i=1,2,3\}$ | $\vec{r} = \vec{f}_1 x' + \vec{f}_2 y' + \vec{f}_3 z' \doteq \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{r}'$

$\vec{r}$ (alt) $=$ $\vec{r}$ (neu), $\underline{r} \neq \underline{r}'$

seien vollständige Orthonormalsysteme (VONS)

Berechne Komponenten $\underline{a}' = (a_1', a_2', a_3')$ aus $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ für $\vec{a}$ für eine Drehung $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{D} \{\vec{f}_j\}$:

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_2 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_3 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1) a_1 + (\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2) a_2 + (\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3) a_3 \\ (\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1) a_1 + (\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2) a_2 + (\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3) a_3 \\ (\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1) a_1 + (\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2) a_2 + (\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3) a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = D \cdot \underline{a} \quad \text{mit } D = (D_{jk}) = (\vec{f}_j \cdot \vec{e}_k) \qquad (4.1)$$

Drehmatrix

- definiert Anwendung von Matrix auf Spalten
  Skalarprodukte „Zeile mal Spalte"
- ist linear: $D(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda(D\underline{a}) + \mu(D\underline{b})$

$$(\lambda D + \mu D')\,\underline{a} = \lambda D\underline{a} + \mu D'\underline{a}$$

mit $(D + D')_{jk} = D_{jk} + D'_{jk}$

- in D stehen beide Basissysteme:

$$D = \begin{pmatrix} — & \underline{f}_1 & — \\ — & \underline{f}_2 & — \\ — & \underline{f}_3 & — \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

in alter Basis   in neuer Basis

also: $\vec{f}_j = D_{jk}\,\vec{e}_k$ (4.1')

kürzer in Index-Schreibweise:

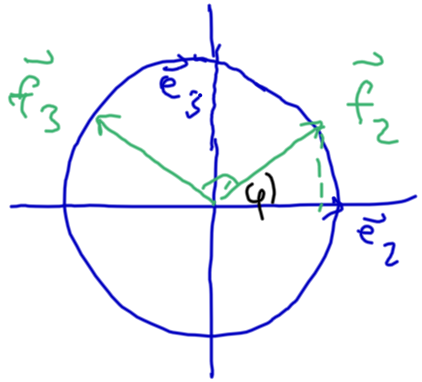
Winkel $\sphericalangle(\vec{f}_j, \vec{e}_k)$

$a'_j = D_{jk}\,a_k$ mit $\underbrace{D_{jk}}_{\text{Matrixelemente}} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k = \cos\varphi_{jk}$ (4.1'') einfachster Fall: Drehung um x-Achse, Winkel φ

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 \, , \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2 \cos\varphi + \vec{e}_3 \sin\varphi \, , \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_2 \sin\varphi + \vec{e}_3 \cos\varphi$$

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_i = \delta_{1i} \qquad \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi$$

$$\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 = \sin\varphi = -\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 \qquad f_i \cdot e_1 = \delta_{i1}$$



$$\rightsquigarrow \quad D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

zyklisch vertauschen $1 \to 2 \to 3 \to 1$

$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix} \, , \quad D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

allgemeiner Fall: Drehung um Achse $\vec{n}$, Winkel φ

läßt sich zusammensetzen aus D_x, D_y, D_z ...

Zusammensetzung von Drehungen:

$$\begin{tikzcd} \{\vec{e}_j\} \arrow[r, "D^{(1)}"] \arrow[rr, bend right, dashed, "D"'] & \{\vec{f}_k\} \arrow[r, "D^{(2)}"] & \{\vec{g}_\ell\} \end{tikzcd}$$

$\vec{a}$: $\quad \underline{a} \qquad \underline{a}' \qquad \underline{a}''$ $\qquad\qquad D\,\underline{a}$ $\; \shortparallel$

$\underline{a}'' = D^{(2)}\underline{a}'$ und $\underline{a}' = D^{(1)}\underline{a}$ $\rightsquigarrow$ $\underline{a}'' = D^{(2)}\left[D^{(1)}\underline{a}\right] = \left[D^{(2)}D^{(1)}\right]a$

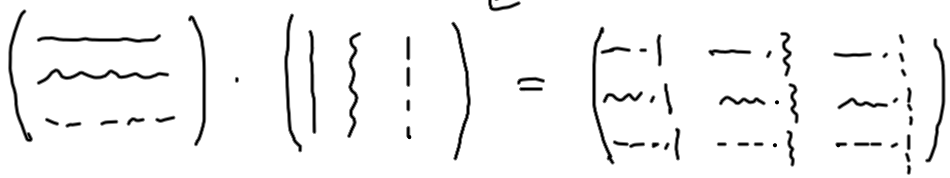
in Elementen:

$$a''_\ell = D^{(2)}_{\ell k}\, a'_k = D^{(2)}_{\ell k} D^{(1)}_{kj}\, a_j =: D_{\ell j}\, a_j \quad , \text{ also:}$$

$$D_{\ell j} = D^{(2)}_{\ell k} D^{(1)}_{kj} \quad \text{oder} \quad D = D^{(2)} D^{(1)} \qquad (4,3)$$

bildlich:

„Zeile x Spalte"



Eigenschaften: $(\lambda A + \mu B)\cdot C = \lambda A\cdot C + \mu B\cdot C$, $(AB)C = A(BC)$

$A\cdot B \neq B\cdot A$! $\qquad$ „Ring"

Weitere Operationen mit Matrizen:

- Transponieren: Spiegeln an der Diagonalen

$$(A^T)_{jk} = A_{kj} \qquad \text{i.a. } A^T \neq A, \quad (A^T)^T = A \qquad (4.4)$$

Speziell: $A^T = A$ „symmetrisch" (6 El.)

$A^T = -A$ „antisymmetrisch" (3 El.)

jede Matrix: $A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A+A^T)}_{\text{sym.}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A-A^T)}_{\text{antisym.}}$, $\quad (AB)^T = B^T A^T \quad (4.5)$

- Invertieren: Matrix-Operation rückgängig machen

„neutrale Operation": $\underline{a}' = E\,\underline{a} \stackrel{!}{=} \underline{a} \;\curvearrowright\; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$

Einheitsmatrix $E_{ij} = (\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij}$. $\quad E \cdot A = A$

Inverses A^{-1}: $\underline{a}'' = A^{-1}\underline{a}' = A^{-1}A\underline{a} \stackrel{!}{=} \underline{a} \;\curvearrowright\; A^{-1}A = \mathbb{1} \quad (4.6)$

oder: $A A^{-1} = \mathbb{1}$, und $(A^{-1})^{-1} = A$

A^{-1} existiert nicht immer! z.B. $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat kein N^{-1}

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (4.7) \qquad \text{weil } \mathbb{1} = AB \cdot (AB)^{-1} = A \underbrace{B B^{-1}} A^{-1}$$
$$= A\,\mathbb{1}\,A^{-1} = \underbrace{A A^{-1}} \quad ✓$$

Determinante

$$|A| = \det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \qquad (4.8)$$

$$A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

Spatprodukt der Zeilen oder der Spalten

Eigenschaften:

- $|\lambda A| = \lambda^3 |A|$ (4.9) • $|\mathbb{1}| = 1$
- $\left| \begin{pmatrix} d_1 & * & * \\ 0 & d_2 & * \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \right| = d_1 d_2 d_3$
- $|A|$ wechselt Vorzeichen bei Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten
  $\hookrightarrow |A| = 0$ falls zwei Zeilen oder Spalten zueinander proportional
- $\left| \begin{bmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{bmatrix} \right| + \left| \begin{bmatrix} | & | & | \\ a' & b & c \\ | & | & | \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} | & | & | \\ a+a' & b & c \\ | & | & | \end{bmatrix} \right|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ (4.10) aber: $|A+B| \neq |A| + |B|$
- $|A^T| = |A|$ (4.11) • $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (4.12)

Spur („Trace")

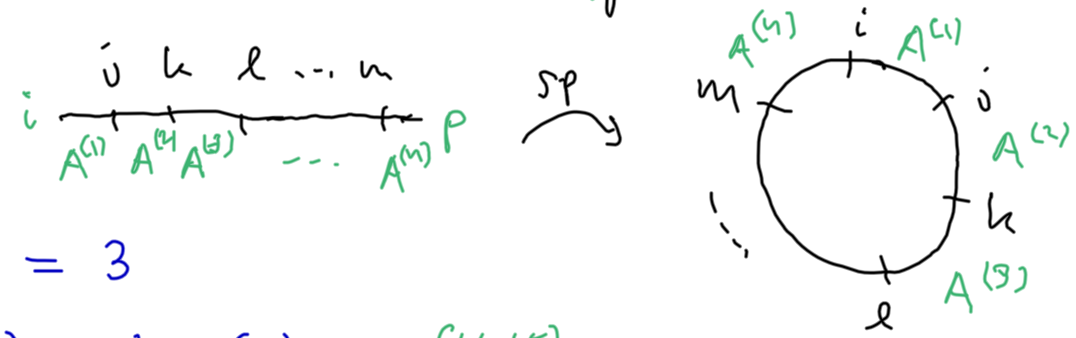
$$\mathrm{sp}(A) = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \qquad (4.13)$$

Eigenschaften:

- $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA) \neq \mathrm{sp}(A)\cdot \mathrm{sp}(B) \qquad (4.14)$
- $\mathrm{sp}\left(A^{(1)}A^{(2)}\ldots A^{(n)}\right) = \mathrm{sp}\left(A^{(2)}A^{(3)}\ldots A^{(n)}A^{(1)}\right)$ zyklisch

weil $A^{(1)}_{ij} A^{(2)}_{jk} A^{(3)}_{kl} \cdots A^{(n)}_{mp} = \left(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}\right)_{ip}$

$\longrightarrow \mathrm{sp}\left[A^{(1)}A^{(2)}\ldots A^{(n)}\right] = A^{(1)}_{ij} A^{(2)}_{jk} A^{(3)}_{kl} \cdots A^{(n)}_{mi}$



- $\mathrm{sp}(\mathbb{1}) = 3$
- $\mathrm{sp}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{sp}(A) \qquad (4.15)$
- $\mathrm{sp}(A+B) = \mathrm{sp}(A) + \mathrm{sp}(B) \qquad (4.16)$
- $\mathrm{sp}(A^T) = \mathrm{sp}(A) \qquad (4.17)$

$\mathrm{sp}(A^{-1}) = \,?$

Drehmatrizen sind speziell, gegeben durch 3 Größen

- wann ist Matrix eine Drehmatrix?
- welche Beziehungen $D \rightleftarrows \vec{n}, \varphi$ (Achse, Winkel)?

$$\delta_{jl} \overset{\text{VONS}}{=} \vec{f}_j \cdot \vec{f}_l \overset{(4.1')}{=} (D_{jk}\vec{e}_k)\cdot(D_{lm}\vec{e}_m) = D_{jk}D_{lm}\,\vec{e}_k\cdot\vec{e}_m$$

$$= D_{jk}D_{lm}\,\delta_{km} = D_{jk}D_{lk} = D_{jk}(D^T)_{kl} = (DD^T)_{jl}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightsquigarrow\ D D^T = \mathbb{1} \qquad \text{„Orthogonalität"} \\ \Leftrightarrow\ D^T D = \mathbb{1} \ \Leftrightarrow\ D^{-1} = D^T \end{array}\right\} \quad (4.18)$$

man sagt: $D \in O(3)$ „orthogonale 3x3 Matrizen"

damit gilt:

$$\underline{a} = D^T \underline{a}' \quad \text{mit } (D^T)_{jk} = \vec{e}_j\cdot\vec{f}_k \iff a_j = (D^T)_{jk}a'_k = a'_k D_{kj} \quad (4.19)$$

$\rightsquigarrow$ Rechtsmultiplikation der Zeile $a^T = (a_1, a_2, a_3)$ mit D:

$$\underline{a}^T = (D^T\underline{a}')^T = \underline{a}'^T \cdot D \quad (4.19')$$

Basisvektoren: $\vec{e}_j = (D^T)_{jk}\vec{f}_k = \vec{f}_k D_{kj} \quad (4.20)$

Skalarprodukt ist Dreh-invariant

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{a}^T \underline{b} \xrightarrow{D} \underline{a}'^T \underline{b}' = (D\underline{a})^T (D\underline{b}) = \underline{a}^T \underbrace{D^T D}\, \underline{b} = \underline{a}^T \underline{b}$$

$$\vec{a} = \vec{e}_j a_j = \underbrace{\vec{f}_k D_{kj}}\, a_j = \vec{f}_k a'_k = \vec{a}$$

Komponenten & Basisvektoren drehen „kontragredient"

eine Drehmatrix hat 3 unabhängige Parameter

Determinante einer Drehmatrix:

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(D D^T) = \det D \cdot \det D^T = (\det D)^2$$

$\rightsquigarrow$ $\det D = +1$ (Drehung) (4.21) oder $= -1$ (Drehspiegelung)

Spiegelung, z.B. $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Punktspiegelung am Ursprung

jede Drehspiegelung läßt sich schreiben als $S \cdot D$

mit $\det D = +1$. Also

· Drehachse $\vec{n}$ aus D

$$D \cdot \underline{n} = \underline{n} \qquad (4.22)$$

Spezialfall eines Eigenwert-Problems

$$\Leftrightarrow \quad (D - \mathbb{1}) \cdot \underline{b} = 0 \ , \quad \text{normiert} \quad \underline{n} = \underline{b}/b$$

dafür muß $\det(D - \mathbb{1}) = 0$ sein.

Beispiel: $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$0 = (D - \mathbb{1})\,\underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b_1 + b_2 + \sqrt{2}\, b_3 \\ b_1 - b_2 - \sqrt{2}\, b_3 \\ -\sqrt{2} b_1 + \sqrt{2} b_2 - 2 b_3 \end{pmatrix}$$

ab-hängig

$$2 \text{ Glgn!} \left\{ \begin{array}{l} b_1 - b_2 - \sqrt{2}\, b_3 = 0 \\ -b_1 + b_2 - \sqrt{2}\, b_3 = 0 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} b_3 = 0 \\ b_1 = b_2 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \underline{b} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

· Drehwinkel φ aus D (hier: nur $\cos\varphi$)

$$D_{\vec{n},\varphi} = D_0^T D_{z,\varphi} D_0 \quad \text{wobei } D_0 : \vec{n} \to \vec{e}_z \text{ dreht}$$

$$\mathrm{sp}\,(D_{\vec{n},\varphi}) = \mathrm{sp}\,(D_0^T D_{z,\varphi} D_0) = \mathrm{sp}\,(D_0 D_0^T D_{z,\varphi}) = \mathrm{sp}\,(\mathbb{1} \cdot D_{z,\varphi}) = \mathrm{sp}\,(D_{z,\varphi})$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{sp}\,(D_{\vec{n},\varphi}) = 1 + 2\cos\varphi \qquad (4.23)$$

Rekonstruktion von D aus $\vec{n}$ & φ

$\vec{n} \doteq (u, v, w)$ $c = \cos\varphi$ $s = \sin\varphi$

$$D = \cos\varphi \cdot \mathbb{1} + (1-\cos\varphi) \cdot (\underline{n} \circ \underline{n}) - \sin\varphi \cdot (\underline{n} \times \ldots)$$

$$\doteq c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-c) \cdot \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix} - s \cdot \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Beweis: (4.24) gilt in speziellem Bezugssystem, z. B. $\vec{n} = \vec{e}_z$:

$$D_{z,\varphi} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - s \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: engere Physiker-Definition von Vektoren präzise:

$\vec{a} = \vec{e}_i a_i$ heißt Vektor $\Longleftrightarrow$ $a_j' = D_{jk} a_k$ unter Drehung

(4.25) $\{\vec{e}_i\} \to \{\vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k\}$

IV.2 Tensor-Begriff

Komponenten | Objekte

Zahl a — Skalar a (Tensor 0-ter Stufe)

Tripel $\underline{a} = (a_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Spalte — Vektor $\vec{a} = \vec{e}_i \, a_i$ (Tensor 1. Stufe)

$\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$ Zeile

Matrix $A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ — Tensor (2. Stufe) $\hat{A} = \hat{e}_{ij} \, A_{ij}$

$\vdots$

Schema $T = (T_{j_1 j_2 \cdots j_n})$ — Tensor n-ter Stufe $\hat{T} = \hat{e}_{j_1 j_2 \cdots j_n} \, T_{j_1 j_2 \cdots j_n}$

allg. Definition:

Schema $(T_{j_1 \cdots j_n})$ definiert einen Tensor n-ter Stufe

$$\hat{T} \doteq (T_{j_1 \cdots j_n}) \iff T'_{j_1 j_2 \cdots j_n} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \cdots D_{j_n k_n} T_{k_1 k_2 \cdots k_n} \quad (4.26)$$

unter Drehung $\{\vec{e}_i\} \longrightarrow \{\vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k\}$

Kurzschreibweise: $T' = D\,D \cdots D \cdot T$

Invarianz des Tensors:

$$\hat{T} = \hat{e}_{j_1 \cdots j_n} T_{j_1 \cdots j_n} = \hat{f}_{k_1 \cdots k_n} T'_{k_1 \cdots k_n}$$

kann Tensor $\hat{A}$ als Abbildung interpretieren:

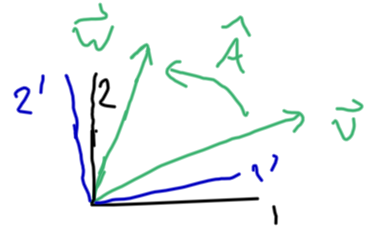
$w_j = A_{jk} v_k$ soll als aktive Operation

$\hat{A}: \quad \vec{v} \longmapsto \vec{w} = \hat{A} \cdot \vec{v}$ gelesen werden

also $\hat{A} \doteq (A_{jk})$ im VONS $\{\vec{e}_i\}$

dann liegt $\hat{A} \doteq (A'_{jk})$ im gedrehten VONS $\{\vec{f}_j\}$ fest:

$w'_j = A'_{jk} v'_k$



ausgeschrieben!

$$w'_j = D_{jl} w_l = D_{jl} A_{lk} v_k = D_{jl} A_{lk} (D^T)_{km} v'_m$$

$$= (D_{jl} D_{mk} A_{lk}) v'_m \overset{!}{=} A'_{jm} v'_m$$

$\curvearrowright \quad A'_{jm} = D_{jl} D_{mk} A_{lk} = D_{jl} A_{lk} (D^T)_{km} \iff A' = D A D^T$ (4.27)

$\curvearrowright \quad sp(A') = sp(A)$ & $\det(A') = \det(A)$

$\curvearrowright \quad \underline{w}' = A' \cdot \underline{v}' = D A \underbrace{D^T \cdot D}_{} \underline{v} = D A \cdot \underline{v} = D \underline{w}$ Kovarianz

Matrix A definiert auch eine Bilinearform:

$$B(\vec{u},\vec{v}) = \underline{u}^T \cdot A \cdot \underline{v} = u_j A_{jk} v_k = \vec{u} \cdot \hat{A} \cdot \vec{v} \qquad (4.28)$$

Vertauschen der Argumente liefert B von A^T:

$$B(\vec{v},\vec{u}) = \underline{v}^T \cdot A \cdot \underline{u} = (A^T \underline{v})^T \cdot \underline{u} = \underline{u}^T \cdot (A^T \underline{v}) = \underline{u}^T \cdot A^T \underline{v}$$

bei gleichen Argumenten $(\vec{v} = \vec{u})$ ergibt sich eine quadratische Form:

$$Q(\vec{u}) = B(\vec{u},\vec{u}) = \vec{u} \cdot \hat{A} \cdot \vec{u} = \underline{u}^T \cdot A \cdot \underline{u} = u_j A_{jk} u_k$$

hierbei überlebt nur der symmetrische Teil $\frac{1}{2}(A + A^T)$.

Dyadisches Produkt / Tensorprodukt

$\vec{a} \circ \vec{b}$ = Tensor 2. Stufe = „Operator" (Dyade)

Def.: $(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} = a_i b_j$ (4.29) speziell: $\det = 0$, $\mathrm{sp} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} \doteq \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot (\cdots)$$

Wirkung auf Vektoren:

$(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} c_j = a_i b_j c_j \iff (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (4.29')

zerlege $\vec{a} \circ \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a})$

antisym. Teil enthält das Kreuzprodukt $\vec{\omega} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} \doteq \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 & 0 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_3 b_2 - a_2 b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \doteq -\vec{\omega} \times \ldots$$

wegen Wirkung auf Vektor:

$$(\vec a\circ\vec b - \vec b\circ\vec a)\cdot\vec c \doteq \begin{pmatrix}0&\omega_3&-\omega_2\\-\omega_3&0&\omega_1\\\omega_2&-\omega_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_3c_2-\omega_2c_3\\ \omega_1c_3-\omega_3c_1\\ \omega_2c_1-\omega_1c_2\end{pmatrix} \doteq -\vec\omega\times\vec c$$

$\Vert$ (4.29') (4.30) $/\!/$ $\vec\omega=\vec a\times\vec b$

$$\vec a(\vec b\cdot\vec c)-\vec b(\vec a\cdot\vec c) \longleftarrow \text{„BAC−CAB"} \longrightarrow -(\vec a\times\vec b)\times\vec c$$

$$(\vec a\circ\vec b-\vec b\circ\vec a)_{ij} = a_ib_j - a_jb_i = \varepsilon_{ijk}(\vec a\times\vec b)_k \qquad (4.30')$$

Spezielle Tensoren

- $\hat e_{ij} = \vec e_i\circ\vec e_j \doteq \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}\end{array}$ weil $(\hat e_{ij})_{kl} = (\vec e_i)_k(\vec e_j)_l = \delta_{ik}\delta_{jl}$ (4.31)

  ist Basis: $\hat A = \hat e_{ij}a_{ij} \doteq a_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\dots+a_{33}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

  Produkte: $\hat e_{ij}\cdot\vec e_k = (\vec e_i\circ\vec e_j)\cdot\vec e_k = \vec e_i(\vec e_j\cdot\vec e_k) = \vec e_i\,\delta_{jk}$

  damit von Objekten zu Komponenten, z.B. $\vec w = \hat A\cdot\vec v$:

  $\vec e_j \underline{w_j} = \hat e_{jk}A_{jk}\cdot\vec e_l v_l = \vec e_j\,\delta_{kl}A_{jk}v_l = \vec e_j\,\underline{A_{jl}v_l} \rightarrow w_j = A_{jl}v_l$

- $\hat e_{j_1j_2\dots j_n} = \vec e_{j_1}\circ\vec e_{j_2}\circ\dots\circ\vec e_{j_n}$ n-fache Dyade

- $\mathbb{1} = \hat{e}_{ij}\,\delta_{ij} = \hat{f}_{ij}\,\delta_{ij} \Leftrightarrow \delta'_{ij} = \delta_{ij}$ dreh-invariant

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{1}$ ist ein drehinvarianter Tensor

$\rightsquigarrow$ $sp(A) = \delta_{ij} A_{ji} = A_{ii}$ drehinvariant

- $\hat{\varepsilon} = \hat{e}_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = \hat{f}_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} \Leftrightarrow \varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ dreh-invariant

$\rightsquigarrow$ $\hat{\varepsilon}$ ist ein drehinvarianter Tensor (3. Stufe)

$\rightsquigarrow$ $\det(A) = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ drehinvariant

ε-Tensor vermittelt zwischen Vektor & antisym. Tensor

$\hat{\varepsilon} : \vec{a} \longmapsto \hat{A}$ wegen $A_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{a}$

und $\hat{A} \longmapsto \vec{a}$ wegen $a_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon} : \hat{A}$

(4.32)

Beh.: zu einer symmetrischen Matrix $H = H^T$ gibt es mindestens eine Drehmatrix D, so dass

$$(4.33) \quad H' = D H D^T = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \doteq \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ausgeschrieben:

$$D H D^T = \begin{pmatrix} - \underline{f}_1^T - \\ - \underline{f}_2^T - \\ - \underline{f}_3^T - \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{f}_1 & \underline{f}_2 & \underline{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \underline{f}_1^T - \\ - \underline{f}_2^T - \\ - \underline{f}_3^T - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ H\underline{f}_1 & H\underline{f}_2 & H\underline{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1^T H \underline{f}_1 & \cdot & \cdot \\ \underline{f}_2^T H \underline{f}_1 & \cdot & \cdot \\ \underline{f}_3^T H \underline{f}_1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \overset{!}{=}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{H} \vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j \quad \text{mit} \quad \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \delta_{ij} \qquad \text{Eigenwert-Problem}$$

(4.34)

λ_j: Eigenwert EW; $\vec{f}_j$: Eigenvektor EV

$\exists$ davon jeweils drei $(j = 1, 2, 3)$

Beweis:

A) Beträge der Eigenvektoren liegt nicht fest $\rightarrow$ kann normieren

B) EW verschieden $\Rightarrow$ EV orthogonal:

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}\vec{f}_1 &= \lambda_1 \vec{f}_1 \\ \hat{H}\vec{f}_2 &= \lambda_2 \vec{f}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \vec{f}_2 \cdot (\hat{H}\vec{f}_1 - \lambda_1 \vec{f}_1) = (\hat{H}^T \vec{f}_2) \cdot \vec{f}_1 - \lambda_1 \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1$$

q.e.d.

c) EW sind Lösungen einer kubischen Gleichung:

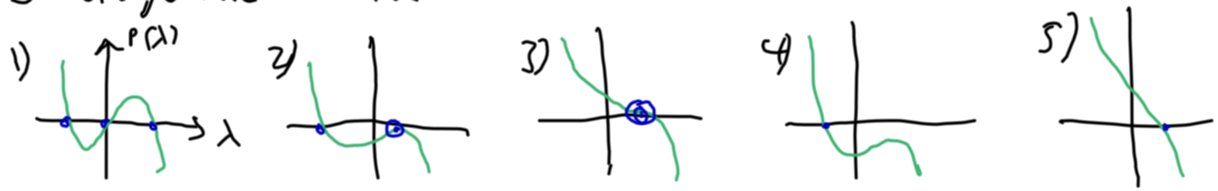
$(\hat{H} - \lambda \mathbb{1})\cdot \vec{f} = 0$ hat Lösungen ungleich $\vec{f} = 0$ genau wenn

$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ ⇝ liefert $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

gesucht sind die Nullstellen des „charakteristischen Polynoms"

$$P(\lambda) = \det(H - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22}-\lambda & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (\mathrm{sp}\, H)\lambda^2 + q(H)\lambda + \det H \qquad (4.75)$$

5 mögliche Fälle



d) für $H = H^T$ treten nur Fälle 1–3 auf

e) bei Entartungen (Fälle 2 & 3) sind 2 EW gleich, z.B. $\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}\vec{f}_1 &= \bar{\lambda}\vec{f}_1 \\ \hat{H}\vec{f}_2 &= \bar{\lambda}\vec{f}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{H}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2) = \alpha\bar{\lambda}\vec{f}_1 + \beta\bar{\lambda}\vec{f}_2 = \bar{\lambda}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2)$$

→ jede Kombination $\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2$ ist EV ⇝ ∃ „Eigen-Ebene"

q.e.d.

Fahrplan zur Hauptachsen-Transformation

① $H = H^T$?

② löse $\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ nach λ; sortiere $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$

Entartung?

③ Proben: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = sp(H)$; $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(H)$

④ zu jedem EW λ_j löse

$(H - \lambda_j \mathbb{1}) \underline{v}_j = 0$ nach $\underline{v}_j$ $\rightsquigarrow$ $\{\vec{v}_j\}$ EV

[kann eine nichtnull Komponente von $\underline{v}_j$ frei wählen]

⑤ Probe der Orthogonalität:

$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$ für $j \neq k$

| shortcut: $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$

bei Entartung: orthog. Linearkomb. wählen

⑥ normiere die EV; $\vec{f}_j = \vec{v}_j / v_j$

wechsle evtl. ein Vorzeichen $(\vec{f}_3 \to -\vec{f}_3)$ so dass Rechtssystem

⑦ notiere Resultat in Form $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ & $D = \begin{pmatrix} - & f_1 & - \\ - & f_2 & - \\ - & f_3 & - \end{pmatrix}$

Tensoren 2. Stufe vermitteln lineare Abbildungen von Vektoren

$\vec{a} = \hat{H} \cdot \vec{u} + \vec{c}$ (Verallg. von linearen Funktionen)

Interpretation: $\vec{u}$ ist Ursache, $\vec{a}$ ist Antwort, $(\hat{H}, \vec{c})$ System-Daten

Beispiel A) Leitfähigkeit

Ursache: $\vec{E}$-Feld, Antwort: Elektron-Geschw. $\vec{v}$
oder besser: Stromdichte $\vec{J} = \frac{\text{Strom } \vec{I}}{\text{Fläche } A}$

lineare Beziehung: $\vec{j} = \hat{\sigma} \cdot \vec{E}$ (4.36) Ohmsches Gesetz

gut bei kleinen Feldstärken; $\hat{\sigma}$ heißt Leitfähigkeits-Tensor

- isotropes Medium $\rightsquigarrow$ keine Vorzugsrichtung $\rightsquigarrow \vec{j} \parallel \vec{E} \rightsquigarrow \hat{\sigma} = \sigma \cdot \mathbb{1}$ ~ Zahl
- anisotropes Medium $\rightsquigarrow \exists$ Vorzugsrichtungen $\rightsquigarrow$ i.a. $\vec{j} \nparallel \vec{E} \rightsquigarrow \hat{\sigma} \neq \sigma \cdot \mathbb{1}$ Tensor

Beispiel B) 2-dimensionales Potenzialminimum

2 Federn $\rightsquigarrow$ $\vec{F} = -\hat{H} \cdot \vec{r}$ $(+\,\mathcal{O}(r^2))$ (4.37) Hookesches Gesetz

harmonische Kraft, Vorzugsrichtungen, i.a. $\vec{F} \nparallel \vec{r}$

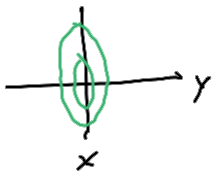
$\exists$ Potenzial ?

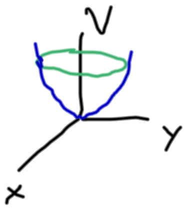
zu Fuß: $\quad F_1 = -H_{11}x - H_{12}y \overset{!}{=} -\partial_x V \rightarrow V = \frac{1}{2}H_{11}x^2 + H_{12}xy + f(y)$

$\quad F_2 = -H_{21}x - H_{22}y \overset{!}{=} -\partial_y V = -H_{12}x - f'(y)$

$\rightarrow H_{12} \overset{!}{=} H_{21}$ und $f(y) = \frac{1}{2}H_{22}y^2 + c$, setze $c=0$

also für $H^T = H$: $\quad V = \frac{1}{2}H_{11}x^2 + H_{12}xy + \frac{1}{2}H_{22}y^2$



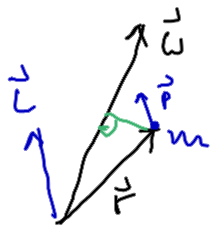


$$= \frac{1}{2}\left(xH_{11}x + xH_{12}y + yH_{21}x + yH_{22}y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underline{r}^T H \underline{r} = \frac{1}{2}\vec{r}\cdot\hat{H}\vec{r} \qquad (4.38)$$

Beispiel C) Trägheitstensor

starrer Körper, Masse m, feste Achse $\vec{\omega}$ durch Ursprung, wird in festem Abstand von Achse gehalten (masselose Drähte)



$$\vec{L} = \vec{r}\times m\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\vec{v}} = m\left(\vec{\omega}\,r^2 - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right)$$

$$= m\left(r^2\,\mathbb{1} - \vec{r}\circ\vec{r}\right)\cdot\vec{\omega} =: \hat{I}\cdot\vec{\omega} \qquad (4.39)$$

definiert Trägheitstensor $\hat{I}$, mit Komponenten

$$I_{jk} = m\left(r^2 \delta_{jk} - r_j r_k\right) \qquad \text{oder} \qquad (4.40)$$

$$I = mr^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} = I^T$$

für mehrere Massen m_α, $\alpha = 1, \dots, N$:

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{L}_\alpha = \sum_\alpha \hat{I}_\alpha \vec{\omega} =: \hat{I} \vec{\omega} \quad , \text{ also}$$

$$I = \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2+z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & z_\alpha^2+x_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2+y_\alpha^2 \end{pmatrix} \qquad (4.40')$$

Zeitabhängigkeit von $\vec{r} \rightarrow$ Zeitabhängigkeit von $\hat{I}$,

damit $\dot{\vec{L}} = \dot{\hat{I}} \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{F} =: \vec{N}$ Drehmoment $\sim$ Unwucht

Ausnahme: $\vec{\omega}$ ist Eigenvektor von $\hat{I}$: $\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega} = \lambda \vec{\omega}$ (4.41)

„Auswuchten"