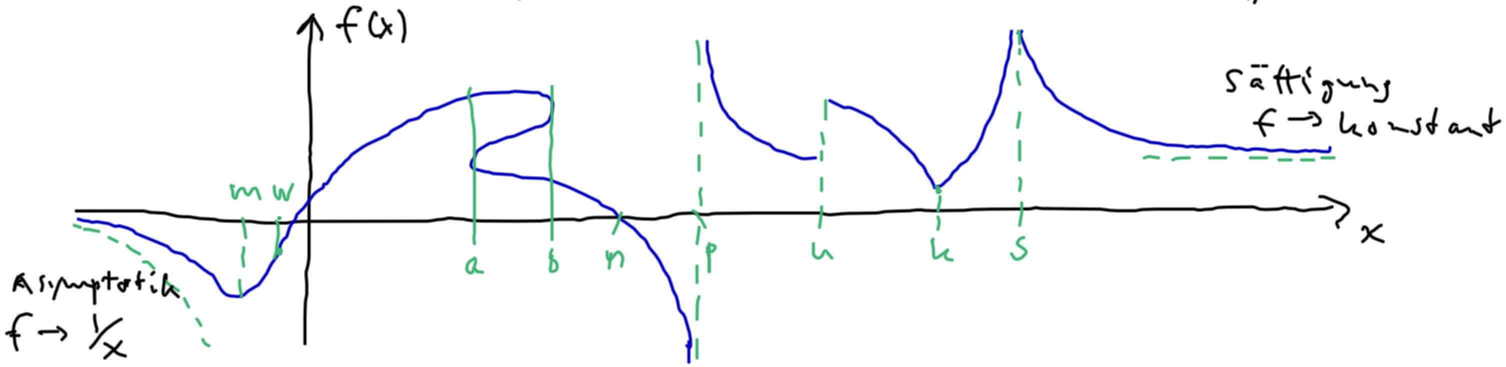
V. FUNKTIONEN

V.1 Allgemeines

Funktionen sind Abbildungen, in der Regel zwischen Kontinua

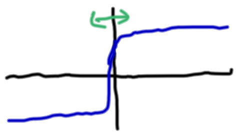
einfachster Fall: $f : \mathbb{R} \supseteq D \to W \subseteq \mathbb{R}$ „von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$"



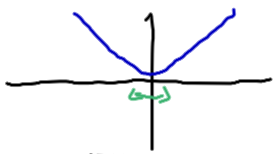
m Minimum, w Wendepunkt, [a,b] mehrdeutig, n Nullstelle,
p Pol (einfacher), u Sprungstelle, k Knick, s Singularität

pathologische Stellen sind „in der Natur" bei höherer „Auflösung" regulär:

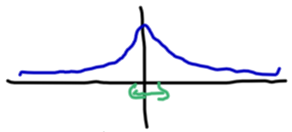
$$\frac{\alpha(x-p)}{(x-p)^2+\varepsilon^2}$$



$$\frac{h}{2}\,\frac{x-u}{\sqrt{(x-u)^2+\varepsilon^2}}$$



$$\sqrt{(x-k)^2+\varepsilon^2}$$



$$\frac{\gamma}{(x-s)^2+\varepsilon^2}$$

- verwandte Funktionen: aus gegebener Funktion f gewinne
  - $f_1(x) = f(-x)$ an y-Achse gespiegelt
  - $f_2(x) = -f(x)$ an x-Achse gespiegelt
  - $f_3(x) = -f(-x)$ im Ursprung gespiegelt
  - $f_4(x) = f(x-a)$ um a nach <u>rechts</u> verschoben
  - $f_5(x) = f(x)+b$ um b nach <u>oben</u> verschoben
  - $f_6(x) = f(c\cdot x)$ mit $\frac{1}{c}$-facher x-Streckung
  - $f_7(x) = d\cdot f(x)$ mit d-facher y-Streckung

  (alle obigen: Graph)

  gerade Fktn.: $f(-x) = f(x)$ Bsp: $\frac{1}{1+x^2}$

  ungerade Fktn.: $f(-x) = -f(x)$ Bsp.: $\tan x$

- zum Entfernen physikalischer Dimensionen

  Funktion $z(t)$, t & z haben Dimension. Wähle typische Konstanten t_0, z_0

  definiere: $f = z/z_0$, $\tau = t/t_0$ dim.-los $\rightsquigarrow$ $z(t) = z_0 f(\tau = t/t_0)$

  Bsp. freier Fall: $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. Natürlich ist $z_0 = h$, $t_0 = \sqrt{h/g}$

  $\rightsquigarrow z(t) = h\left[1 - \frac{1}{2}gt^2/h\right] = h\left[1 - \frac{1}{2}\left(t/t_0\right)^2\right] = h\cdot f(\tau)$ mit $f(\tau) = 1 - \frac{1}{2}\tau^2$

  Newton: $\ddot{z} = -g$, $z(0) = h$, $\dot{z}(0) = 0$ $\longrightarrow$ $f'' = -1$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Umkehrfunktionen

f^{-1} definiert über $f^{-1}(\underbrace{f(x)}^{y}) = x$ oder $f(\underbrace{f^{-1}(y)}^{x}) = y$ (5.1)

$x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x$ $\qquad$ $y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x \overset{f}{\longmapsto} y$

Graph von f^{-1} aus Graph von f durch Spiegelung an Diagonalen $y=x$

Die Ableitung von f^{-1} erhält man aus Ableitung von f:

$$\partial_x \left[f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y}) = x \right] \overset{\text{Ketten-regel}}{\rightsquigarrow} \partial_y f^{-1}(y) \cdot \partial_x f(x) = \partial_x x = 1 \quad \text{, also:}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \left[\frac{dy}{dx}\right]^{-1} \qquad (5.2)$$

Beispiele:

A) $f(x) = x^2 = y \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$ (positive Art)

Teste (5.2): $\quad \partial_y \sqrt{y} = \dfrac{1}{(\partial_x x^2)|_{x=\sqrt{y}}} = \dfrac{1}{(2x)|_{x=\sqrt{y}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ ✓

B) $f(x) = \sin x = y \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \arcsin y = x$

$$\partial_y \arcsin y = \frac{1}{(\partial_x \sin x)|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}\,\big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

V.2 Die Exponentialfunktion

beschreibt alle Wachstumsvorgänge, wenn:

Mengenänderung ist proportional zur Menge selbst

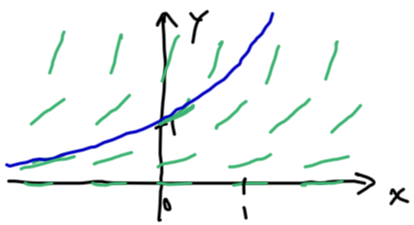
etwa: Bakterien-Anzahl $N(t)$ nehme zu gemäß $\dot{N} = \alpha N$

AW: $N(0) = N_0$ gegeben $\overset{N=N_0 f}{\rightsquigarrow}$ $\frac{1}{\alpha}\partial_t(\cancel{N_0} f) = \cancel{N_0} f$

mache dimensionslos: $x = \alpha t$, $f = f(x)$ $\rightsquigarrow$ $f'(x) = \overbrace{f(x)}^{y}$, $f(0) = 1$

Def.: $\exp(x)$ löst die Differenzialgleichung $f'(x) = f(x)$ mit $f(0) = 1$. (5.3)

Graph: trage Steigung am Punkt (x,y) ein:



exp monoton steigend, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_+$

exp immer positiv ($f(x_0) = 0 \rightsquigarrow f(x) = 0$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Funktionalgleichung: betrachte Hilfsfunktion $g(x) = \exp(x+z)$

$g'(x) = \exp(x+z) = g(x)$, aber $g(0) = \exp(z)$, also:

$g(x) = \exp(z)\cdot\exp(x)$ $\rightsquigarrow$ $\exp(x+z) = \exp(x)\cdot\exp(z)$ (5.4)

Iteration von (5.4):

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

$$\left.\begin{aligned} \exp(x) &= \exp\left(\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\dots+\frac{x}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n \\ \exp(1) &= \left[\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m = \left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{n}{x}} \end{aligned}\right\} \quad \exp(x) = [\exp(1)]^x$$

$\rightarrow$ $\exp(x) = e^x$ mit $e := \exp(1) \approx 2.71828\dots$ Euler-Zahl

(5.5)

$\rightarrow$ $\exp(-x) = e^{-x} = 1/e^x = 1/\exp(x)$

$\rightarrow$ $\partial_x e^x = e^x \rightarrow \partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}$, $\partial_x^n e^{\gamma x} = \gamma^n e^{\gamma x}$ (5.6)

Reihe:

versuche $f' = f$ per Polynom-Ansatz zu lösen: $f \overset{?}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2$

$\rightarrow$ $f' = c_1 + 2c_2 x \overset{!}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 = f$ geht nicht

$\rightarrow$ addiere beliebig viele Potenzen, d.h. Polynom $\rightarrow$ Potenzreihe

$$f(x) \overset{?}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 = 1)$$

einsetzen:

$$f' \stackrel{!}{=} c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$
$$\stackrel{!}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = f$$

Koeffizientenvergleich: $n c_n = c_{n-1} \rightsquigarrow c_n = \frac{c_{n-1}}{n}$ Rekursion

eleganter:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n \underline{x^{n-1}} \stackrel{!}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \stackrel{m=n-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \underline{x^{n-1}} = f$$

Lösung: $c_n = \frac{1}{n} c_{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} c_{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\frac{1}{n-2} c_{n-3} = \dots = \frac{1}{n!} c_0$

also: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (5.7) $\quad 0! = 1$

Test: $\partial_x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \stackrel{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = e^x$ ✓

Konvergenz? überall, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$

Asymptotik: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \iff \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ (5.8)

$\mathcal{O}(x^2/n)$

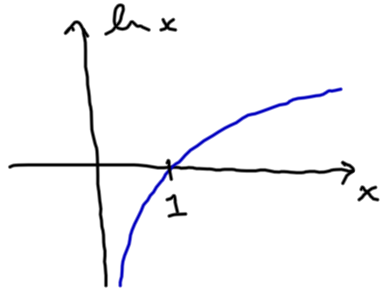
Produktdarstellung: $e^x = \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n \stackrel{\varepsilon = \frac{x}{n}}{=} (e^{\varepsilon})^n = \left(\underbrace{1+\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)^n = (1+\varepsilon)^n + \mathcal{O}(n\varepsilon^2)$

$\longrightarrow e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (5.9)

Umkehrfunktion: $\quad f^{-1}(y) = \ln y \quad$ zu $\quad y = f(x) = e^x > 0$

Eigenschaften: $\quad e^{\ln x} = x \,, \quad \ln e^x = x$

(5.10)



$$\partial_y \ln y = \frac{1}{\partial_x e^x\big|_{x=\ln y}} = \frac{1}{e^x\big|_{x=\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\ln(xy) = \ln\left(e^{\ln x} e^{\ln y}\right) = \ln\left(e^{\ln x + \ln y}\right) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^a) = \ln\left(e^{a \ln x}\right) = a \ln x$$

$$\partial_x a^x = \partial_x\left(e^{x \ln a}\right) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

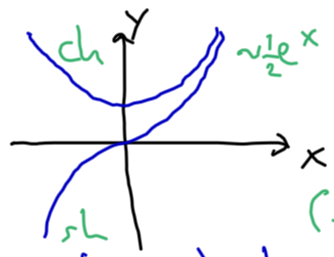
$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x \,, \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \,,$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \,, \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

verwandte Funktionen:

$$\cosh x \equiv \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{gerade}$$

$$\sinh x \equiv \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{ungerade}$$



(5.11)

Eigenschaften: $\quad e^x = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x \,, \quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \,, \quad \partial_x \mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}\, x \,, \quad \partial_x \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, x$

V.3 Potenzreihen

Exp-Funktion war Beispiel einer Potenzreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Def.: Potenzreihe ist eine formale Summe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =: p_\infty(x)$

Eigenschaften:

- Konvergenz? falls $\left| \sum_{n=k}^{l} c_n x^n \right| < \varepsilon$ für $\forall\, k, l > N(\varepsilon)$
- Approximation einer Funktion $f(x)$ [auch ohne Konvergenz]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n + R_{N+1}(x)$$

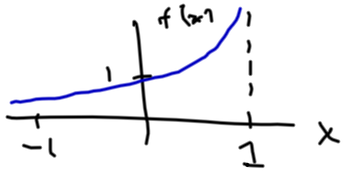
nur gut falls $f(x)$ nicht pathologisch bei $x=0$

$R_{N+1}(x)$ ← Restglied, von $\mathcal{O}(x^{N+1})$

- Darstellung einer Funktion über Potenzreihenansatz, z.B. für Lösen von Differentialgleichungen.

zweites und wichtigstes Beispiel: geometrische Reihe

$f(x) = \frac{1}{1-x}$



erfinde Gleichung für diese Fkt.

a) $f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}\cdot(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightsquigarrow (1-x)f'(x) = f(x)$

mit $f(0) = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow (1-x)\cdot f(x) = 1$ algebraisch

setze Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ein!

in b):
$$1 = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(1-x)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n x^n - c_n x^{n+1}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \underset{k=n-1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$
$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})x^n$$

Koeffizientenvergleich: $1 = c_0$, $0 = c_n - c_{n-1}$ für $n \geq 1 \rightsquigarrow c_n = 1 \quad \forall n$

Ergebnis: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. für $|x| < 1$ (5.12)

Approximation $\frac{1}{1-x} \approx 1+x+x^2+\dots+x^N + R_{N+1}(x)$

Restglied durch „Abspalten":

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x}} = 1 + x \cdot \left(\underbrace{1+x\cdot\frac{1}{1-x}}\right) = \dots = 1+x+x^2+\dots+x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \qquad (5.13)$$

Tricks, wie man sich Potenzreihenentwicklungen besorgt:

- Einsetzen:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots$$

- Umformen: $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$1+x = \sqrt{1+x}^{\,2} = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = c_0^2 + 2c_0c_1 x + (2c_0c_2 + c_1^2)x^2 + \dots$$

Vergleich: $1 = c_0^2$, $1 = 2c_0c_1$, $0 = 2c_0c_2 + c_1^2$, ... $\rightsquigarrow c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{8}$, ...

also: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

- Differenzieren $\ln(1+x) = ?$

$$\partial_x \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-x)^m = \partial_x \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} (-1)^m x^{m+1} + \text{konst} \right)$$

konst? $\ln(1+0) = 0 = \text{konst.}$

also: $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad (5.14)$$

- Addition

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n \text{ gerade}} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$\operatorname{sh} x$ analog oder über $\partial_x \operatorname{ch} x \rightsquigarrow \operatorname{sh} x = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{x^n}{n!} = x + \dots$

- Differenzialgleichungen

$f'' + f = 0$ mit AW $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} [c_n n(n-1) + c_{n-2}] x^{n-2} \rightsquigarrow c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n-1)}. \quad \text{AW: } c_0 = 1, \; c_1 = 0$$

(5.15)

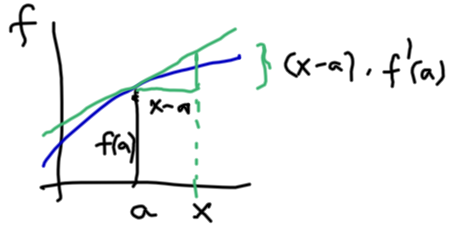
$\rightsquigarrow c_{n \text{ ungerade}} = 0$, $c_n = \pm \frac{1}{n!}$ für n gerade, also $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$

entsprechend: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

Taylor-Reihe

wir kennen lineare Approximation von $f(x)$ bei $x = \bar{x}$

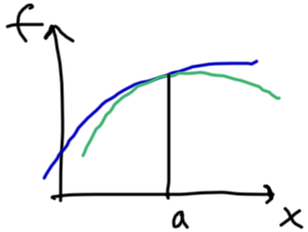
$$f(x = \bar{x} + \varepsilon) = f(\bar{x}) + \varepsilon \cdot f'(\bar{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$



benenne um: $\bar{x} \to a$, $\varepsilon \to x-a$

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \mathcal{O}((x-a)^2)$$

besser: parabolische Approximation



$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + (x-a)^2 \cdot g(a) + \dots$$

differenziere:

$$f'(x) = 0 + 1 \cdot f'(a) + 2 \cdot (x-a)\, g(a) + \dots$$

$$\to \quad g(a) = \frac{1}{2} f''(a)$$

oder nochmal differenzieren: $f''(x) = 2 \cdot g(a) + \mathcal{O}(x-a)$

allgemein:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underline{f(a)} + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + c_4 (x-a)^4 + \dots && \to \underline{x=a}: \; f(a) \\
f'(x) &= 0 + \underline{c_1} + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + 4c_4 (x-a)^3 + \dots && \to c_1 \\
f''(x) &= 0 + \underline{2c_2} + 6c_3 (x-a) + 12 c_4 (x-a)^2 + \dots && \to 2c_2 \\
f'''(x) &= 0 + \underline{6c_3} + 24 c_4 (x-a) + \dots && \to 6c_3
\end{aligned}$$

also: $f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n \rightarrow c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$ Taylor-Reihe (5.16)

oder

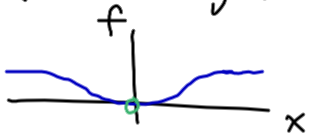
$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot h^n = \left(e^{h \cdot \partial_x} f\right)(a)$$ (5.16')

Abbruch bei $n=N$ $\Leftrightarrow$ Approx. von f durch Polynom N-ten Grades

Voraussetzung: $f \in C^{\infty}$ („hinreichend glatt")

geht nicht immer! Gegenbeispiel:

$f(x) = e^{-c/x^2}$



$f^{(n)}(x) = \text{Polynom}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-c/x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0$

Taylorreihe $\equiv 0$!

oft nützlich, z.B. $f(x) = (1+x)^{\lambda} = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)x^2 + \dots$ (5.17)

oft benutzt: harmonische Näherung für Teilchen nahe V-Minimum $x=a$

$$V(x) = V(a) + \cancel{V'(a)(x-a)} + \frac{1}{2}V''(a) \cdot (x-a)^2 + O((x-a)^3)$$

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow$ Minimum $\qquad \omega^2 = V''(a)/m$ (5.18)

$$m\ddot{x} = -\partial_x V = -V''(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2) = -m\omega^2(x-a) + \dots$$ Hooke

V.4 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Körper-Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um die Lösungen von

$x^2 + 1 = 0$. Nenne $\sqrt{-1} =: i$ „imaginäre Einheit"

also: $i \cdot i = -1$ (5.19)

komplexe Zahlen = Paare von reellen Zahlen (x, y)

= Linearkombination von 1 & i:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$$

[Vergleich mit 2-dim Vektoren $\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 \doteq (v_1, v_2)$]

Realteil $\mathrm{Re}(x+iy) = x$ Imaginärteil $\mathrm{Im}(x+iy) = y$

z heißt reell wenn $y = 0$, imaginär wenn $x = 0$

Addition: $(x+iy) + (u+iw) = (x+u) + i(y+w)$

Multiplikation: $(x+iy) \cdot (u+iw) = (xu - yw) + i(xw + yu)$

Negatives: $-(x+iy) = -x - iy$ Null: $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Inverses: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ Körper: $z \cdot w = 0$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee w = 0$

Wurzeln

$\sqrt{x+iy} = u+iv$ mit $u^2 = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $v^2 = \frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

Löst $(u+iv)^2 = x+iy$ $\rightsquigarrow$ jede komplexe Zahl hat 2 Wurzeln

Hauptsatz der Algebra:

jedes Polynom n-ten Grades in $\mathbb{C}$ hat n Nullstellen (mit Multipl.)

Konjugation: involutive Abbildung $i \mapsto -i$ d.h.

$z = x+iy \longleftrightarrow x-iy =: z^*$ oder $\bar{z}$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+z^*)$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-z^*)$ (5.20)

$\rightsquigarrow$ z reell $\Leftrightarrow$ $z = z^*$ Involution: $(z^*)^* = z$

$\rightsquigarrow$ $(z+w)^* = z^* + w^*$, $(z\cdot w)^* = z^* \cdot w^*$

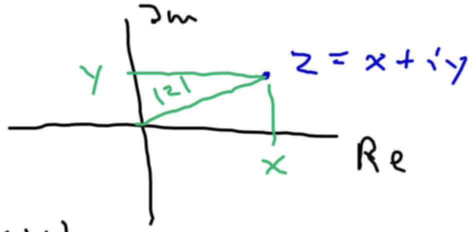
Betrag (Norm, Absolutwert): $zz^* = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$

$$|z| := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \quad (5.21)$$

$\rightsquigarrow$ $|z| = |z^*| = |-z|$, $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, $|z+w| \leq |z| + |w|$

geometrische Darstellung

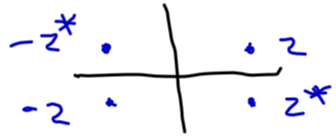
$z \doteq (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ „komplexe Ebene"



Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Länge des Vektors (x, y)

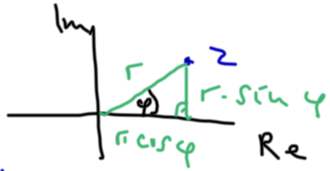
$\rightsquigarrow$ $|z - w|$ = Abstand (z, w), $|z + w| \leq |z| + |w|$ Δ-Ungleichg.

Spiegelung an Achsen:



Addition ist vektoriell

Produkt ? Polarkoordinaten!



$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(c + is)$$

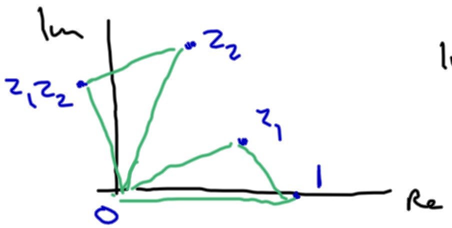
mit $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi =: \arg(z) = \arctan\frac{y}{x} \mod 2\pi$ (5.22)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot (c_1 + is_1) \cdot (c_2 + is_2) = r_1 r_2 \left([c_1 c_2 - s_1 s_2] + i[s_1 c_2 + c_1 s_2]\right)$$

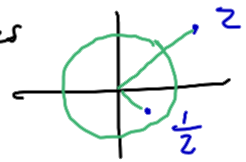
$$= \underbrace{r_1 r_2}\left(\cos(\underbrace{\varphi_1 + \varphi_2}) + i\sin(\underbrace{\varphi_1 + \varphi_2})\right)$$

also: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ (5.23)

geometrisch:



Inverses



$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$

Multipl. mit i
$\shortparallel$
Drehung um $\pi/2$

Konsequenz:

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ Moivre

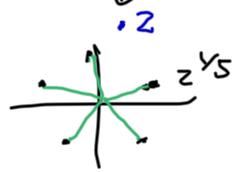
schnelle Methode, $\sin n\varphi$ & $\cos n\varphi$ zu berechnen,
z.B. $r=1$, $\cos n\varphi = \mathrm{Re}(z^n) = \mathrm{Re}((\cos\varphi + i\sin\varphi)^n)$

n-te Wurzel: $\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow z = w^n$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\rightsquigarrow$ z.B. $\sqrt[5]{z}$

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ $\rightsquigarrow$

$\rho^n = r$, $n\theta = \varphi$ $\rightsquigarrow$ $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\cdot\frac{k}{n}$
mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$



5 Lösungen

Exponentialfunktion:

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ existiert, wähle $z = ix$ imaginär

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \pm \ldots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 \pm \ldots\right)$$

$= \cos x + i\sin x$ Euler (5.24)

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \mathrm{ch}(ix) \\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{i}\mathrm{sh}(ix) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow z = r\cdot e^{i\varphi}$ (5.25) $\rightsquigarrow e^{\pm i\pi} = -1$, $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$ (5.26)