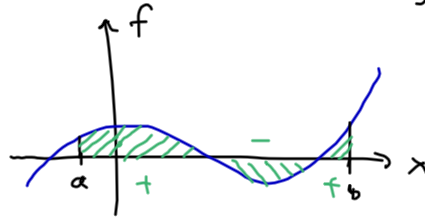


VI. INTEGRALE

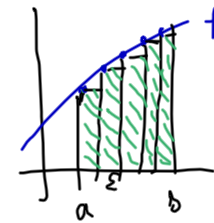
VI.1 Gewöhnliche Integrale

ein Ziel: Berechnung von Flächen unter Graphen von Funktionen



Fläche $F_a^b = \int_a^b dx f(x)$
 skizziertes Σ \leftarrow $\begin{matrix} \downarrow & \rightarrow \\ \text{differenzial} & \text{Integrand} \end{matrix}$

Beziehung zu Σ : $\int_a^b dx f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon \cdot f(a+k\epsilon)$
 $N\epsilon = b-a$



Eigenschaften: (G.1)

$$\int_b^a dx f := - \int_a^b dx f \quad \leadsto \quad \int_a^a dx f = 0$$

$$\int_a^b dx \text{ konst.} = \text{konst.} \cdot (b-a)$$

$$\cdot f(-x) = -f(x) \quad \leadsto \quad \int_{-a}^a dx f(x) = 0$$

$$\int_a^b dx (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx f + \beta \int_a^b dx g$$

$$\cdot \int_a^b dx f + \int_b^c dx f = \int_a^c dx f$$

$$\cdot \int_a^b dx f(x) = \int_{a+c}^{b+c} dx f(x-c)$$

$$\cdot \int_a^b dx f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx f(\lambda x)$$

Hauptsatz: betrachte $\int_a^b dx f(x)$ als Funktion von b :

$$\int_a^b dx f(x) =: I(b, a) \quad \text{wackele an oberer Grenze:}$$

$$I(b+\varepsilon, a) - I(b, a) = \left(\int_a^{b+\varepsilon} - \int_a^b \right) dx f(x) = \int_b^{b+\varepsilon} dx f(x) = \varepsilon \cdot f(b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\rightarrow \partial_b I(b, a) = \partial_b \int_a^b dx f(x) = f(b)$$

Def.: eine Stammfunktion F zu einer Funktion f erfüllt $F' = f$
„Anti-Ableitung“, nur bis auf Konstante $\underset{C}{}$ festgelegt

$$\rightarrow I(b, a) = F(b) + C$$

$$\text{für } b = a: I(a, a) = 0 = F(a) + C \quad \left. \vphantom{I(a, a)} \right\} \Rightarrow I(b, a) = F(b) - F(a)$$

$$\text{Fazit: } \int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \frac{dF}{dx}(x) = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (6.2)$$

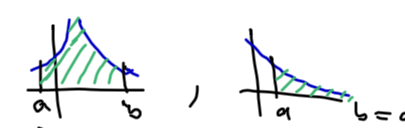
Integrieren ist eine Kunst. Aber es gibt Tricks!

z.B. Symmetrieargumente: $\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin x}{1+x^2} = 0$ weil $f(-x) = -f(x)$

Lösungsstrategie: f skizzieren, umformen, Ansätze versuchen $f = \partial_x(\dots)$

$$\text{Bsp.: } \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx \tan x \stackrel{\text{sym}}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \tan x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \frac{\sin x}{\cos x} \stackrel{\text{raten}}{=} - \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \partial_x \ln \cos x \stackrel{(6.2)}{=} - \ln \cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$$
$$= - \ln \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) + \ln \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$$

Uneigentliche Integrale

→ Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken: , solche Integrale müssen nicht existieren ($F = \infty$).

definiert als Grenzwerte

$$\int_a^{\infty} dx f(x) := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x), \quad \int_0^b dx f(x) := \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b dx f(x)$$

Beispiele: $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx e^{-\lambda x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b dx \partial_x \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda b} - \frac{-1}{\lambda} \right) \\ &\text{oder} \int_0^{\infty} dx \partial_x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \dots = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dx x^{-\lambda} \stackrel{\lambda \neq 1}{=} \left[\frac{1}{1-\lambda} x^{-\lambda+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1-\lambda} (1 - (0)^{1-\lambda}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda} & \text{falls } \lambda < 1 \\ \infty & \text{falls } \lambda > 1 \end{cases}$$

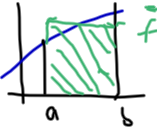
$$\int_0^{\infty} dx \{ \ln(1+e^x) - x \} < \infty ? \quad \text{untersuche Integrand für } x \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &= \ln(e^x + 1) - x = \ln[e^x(1+e^{-x})] - x = \underbrace{\ln e^x}_x + \ln(1+e^{-x}) - x \\ &= \ln(1+e^{-x}) = e^{-x} - \frac{1}{2}(e^{-x})^2 + \frac{1}{3}(e^{-x})^3 \mp \dots \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \leadsto \text{existiert} \end{aligned}$$

VI.2 Beispiele

a) Mittelung

Grenzwert des arithmetischen Mittels auf kontinuierliche Mengen

$$\bar{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n f_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum f_n \cdot \Delta x}{N \cdot \Delta x} = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x)$$


$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x)^2 \neq \bar{f}^2 = \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b dx f(x) \right)^2 \quad (6.3)$$

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{\alpha f} = \alpha \cdot \bar{f}, \quad \bar{1} = 1$$

Schwankung:

$$\Delta f := \sqrt{\overline{(f-\bar{f})^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - 2\bar{f}\bar{f} + \bar{f}^2} = \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2} \quad (6.4)$$

Bsp.: harmonischer Oszillator $x(t) = A \cos \omega t$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T dt A \cos \omega t = 0, \quad \overline{(\Delta x)^2} = \overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} A^2$$

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} \overline{x^2} = \frac{k}{4} A^2$$

$$\bar{T} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{m}{2} (A\omega \sin \omega t)^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{4} A^2$$

$m\omega^2 = k$

b) Lineare Massenverteilung

m_i ($i=1, \dots, N$) $\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma(x)$, $x \in [0, L]$ Massendichte

$\rightarrow \sigma(x) dx$ Masse zwischen x und $x+dx$

$\rightarrow M = \sum_{i=1}^N m_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M = \int_0^L dx \sigma(x)$ Gesamtmasse

$\rightarrow m(x) = \int_0^x dy \sigma(y)$ „Masse von 0 bis x “

wichtig sind „Momente“ der Massendichte

Beispiele:

Schwerpunkt $R_S = \frac{1}{M} \sum_a m_a x_a \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R_S = \bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^L dx \sigma(x) \cdot x$
(6.5)

Trägheitsmoment um $x=0$:

$I = \sum_a m_a x_a^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} I = M \cdot \bar{x}^2 = \int_0^L dx \sigma(x) \cdot x^2$
(6.6)

c) Überlagerung

Zwei Kraftfelder $\vec{F}_{(1)}$ & $\vec{F}_{(2)} \rightarrow$ Summe $\vec{F} = \vec{F}_{(1)} + \vec{F}_{(2)}$

Seien konservativ $\vec{F}_{(i)}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_{(i)}(\vec{r}) \quad i=1,2$

$\rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V$ mit $V = V_{(1)} + V_{(2)}$

Bsp.: Gravitationspotenzial einer linearen Massenverteilung

eine Masse (M_0, \vec{r}_0) : $V(\vec{r}) = -\frac{g m M_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

viele Massen (M_a, \vec{r}_a) : $V(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N \frac{-g m M_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$

Kontinuierliche Massenverteilung ($\sigma(x)$ entlang $x \in [0, L]$),

$$V(\vec{r}) = -g m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{|\vec{r} - \vec{r}'(x')|} = -g m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

$\vec{r}' = \vec{e}(x, y, z)$ (6.7)

VI.3 Integrationsmethoden

a) Partialbruch-Zerlegung

Beispiel: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x^2}$, mit $A, B \in \text{Polynome}$

finde A, B : $1 = A(1+x^2) + Bx = A + x \cdot (B + Ax)$

$\leadsto A=1, B=-x$, d.h. $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

b) Partielle Integration nutze Produktregel

$$f = u \cdot v \leadsto f' = u' \cdot v + u \cdot v' \leadsto \int_a^b dx (uv)' = [uv]_a^b = \int_a^b dx u'v + \int_a^b dx uv'$$

$$\leadsto \int_a^b dx u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx uv' \quad (6.8)$$

Beispiel: $\int_0^y dx \ln x = \int_0^y dx 1 \cdot \ln x = [x \ln x]_0^y - \int_0^y dx x \cdot \frac{1}{x}$
 $= y \ln y - y$

c) Substitution = Wechsel der Integrationsvariablen

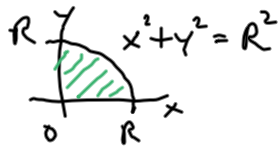
$$\underline{I} = \int_{t(a)}^b dx f(x) \quad \text{Substitution: } \begin{array}{l} x \rightarrow t \\ x = x(t) \\ dx = \frac{dx}{dt} dt = dt \dot{x}(t) \end{array}$$

$$\underline{I} = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \dot{x}(t) f(x(t)) =: \int_{t(a)}^{t(b)} dt \dot{x}(t) g(t) \quad (6.9)$$

Grenzen: $x=a \Leftrightarrow t=t(a)$ und $x=b \Leftrightarrow t=t(b)$

Vorsicht, wenn $x(t)$ nicht monoton!

Beispiel:



Kreisfläche

$$F_{\odot} = 4 \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} = 4 \int_0^{\pi/2} dy R \cos y \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 y}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sub: } x = R \sin y \\ dx = R \cos y dy \\ [0, R] \Leftrightarrow [0, \pi/2] \end{array} \right\}$$

$$= 4 R^2 \int_0^{\pi/2} dy \cos y \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$= 4 R^2 \int_0^{\pi/2} dy \cos^2 y$$

$$= 4 R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi R^2$$

d) Differenzieren nach Parameter

$$\text{Beispiel: } \int_0^{\infty} dx x^n e^{-\alpha x} = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-\alpha x} \Big|_{\alpha=1} = \left[(-\partial_{\alpha})^n \int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} \right]_{\alpha=1}$$

$$= \left[(-\partial_{\alpha})^n \frac{1}{\alpha} \right]_{\alpha=1} = n! \alpha^{-(n+1)} \Big|_{\alpha=1} = n!$$

e) Parameter-Abhängigkeit

... falls nur die Abhängigkeit von einem Parameter gesucht...

Beispiel: T-Abhängigkeit der Energie E eines Hohlraumstrahlers

$$E = \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{(hc)^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T} + 1} \stackrel{\varepsilon = Tx}{=} \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{T dx}{(hc)^3} \frac{T^3 x^3}{e^x + 1} = \frac{V T^4}{(hc)^3 \pi^2} \int_0^\infty \frac{dx x^3}{e^x + 1}$$

f) Reihenentwicklung des Integranden

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b dx x^n \quad (\text{falls konvergiert})$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1} &= \int_0^\infty dx x^3 e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-x}} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \int_0^\infty dx x^3 e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-x})^n \\ &= \sum_{n+1=k} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_0^\infty dx x^3 e^{-kx} \stackrel{x=y/k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^4} \underbrace{\int_0^\infty dy y^3 e^{-y}}_{(d) = 3! = 6} \\ &= 6 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^4} \stackrel{\text{Brounker}}{=} 6 \cdot \frac{7\pi^4}{720} \end{aligned}$$

VI.4 Kurven-, Flächen-, Volumenintegral

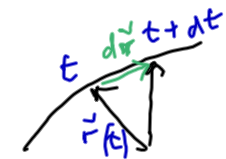
Verallgemeinerungen, die sich auf gewöhnliche Integrale reduzieren

a) Vektor-Integral

$$\int_a^b dx \vec{f}(x) = \int_a^b dx (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = \left(\int_a^b dx f_1(x), \int_a^b dx f_2(x), \int_a^b dx f_3(x) \right)$$

b) Kurven- oder Weg-Integral

Beiträge werden entlang einer Kurve aufgesammelt



Kurve C , parametrisiere durch $t \in [t_1, t_2]$: $\vec{r}(t)$

im Zeitraum $[t, t+dt]$ ändert sich \vec{r} um

$$\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) dt = d\vec{r}(t)$$

Länge des Verschiebvektors $d\vec{r}$

$$(dx)^2 \neq dx^2 = 2x dx$$

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = v(t) dt \quad (6.10) \quad v = |\dot{\vec{r}}|$$

ds ersetzt dx im Kurvenintegral entlang C von $f(\vec{r}(t)) = g(t)$

$$\Rightarrow \int_C ds f(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) f(\vec{r}(t)) \quad (6.11)$$

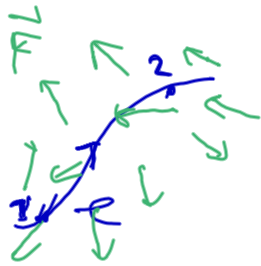
Beispiele:

• Länge von \mathcal{C} : $L = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t)$ mit $v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{\vec{r}}^2}$

• Masse eines Drahts: $M = \int_{\mathcal{C}} ds \sigma(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) \sigma(\vec{r}(t))$

• Gravitationspotenzial eines Drahts:
$$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_{\mathcal{C}} ds \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\gamma m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{|\dot{\vec{r}}'(t)| \sigma(\vec{r}'(t))}{|\vec{r} - \vec{r}'(t)|} \quad (6.12)$$

• Arbeit längs \mathcal{C} :



Tangenteinheitsvektor

$$A = \int_{\mathcal{C}} ds F_{||}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} |\dot{\vec{r}}| \vec{e}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \quad (6.13)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) F_{||}(\vec{r}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t))$$

für konservatives $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$: $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V = -\partial_t V(\vec{r}(t))$

$\rightarrow A = \int_{t_1}^{t_2} dt (-\partial_t V(\vec{r}(t))) = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)) = V(1) - V(2) \quad (6.14)$

c) Ebenes Flächenintegral

summiere Integranden $f(x,y)$ auf in einem Gebiet

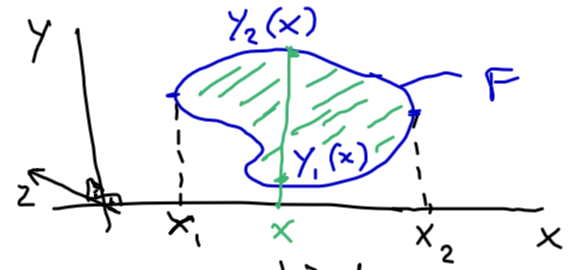
$$(x,y) \in F \subseteq \mathbb{R}^2$$

erst $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x,y)$ für jedes feste x

$$= F(x)$$

dann $\int_{x_1}^{x_2} dx F(x) = I$, d.h.

$$I = \int_F d^2r f(x,y) := \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x,y)$$



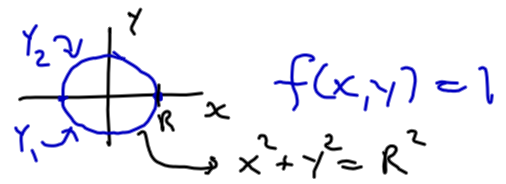
geometrischer
Volumeninhalt
unter Graph $f(x,y) = z$

$$(6.15)$$

Beispiele:

• Flächeninhalt einer Kreisscheibe

$$F = \int_F d^2r 1 = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy 1 = \int_{-R}^{+R} dx 2\sqrt{R^2-x^2} \stackrel{\text{s.o.}}{=} 2 \cdot \frac{\pi}{2} R^2$$



• Volumen einer Kugel

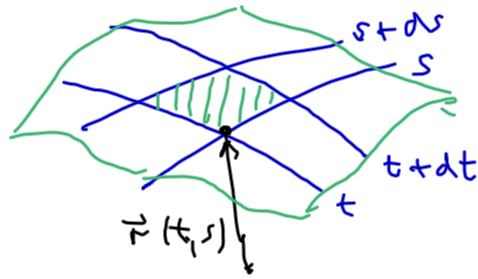
$$V = 8 \int_F d^2r \sqrt{R^2-r^2} = 8 \int_0^R dx \int_0^{\pi/2} dy \sqrt{R^2-x^2-y^2} = 8 \int_0^R dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2 \varphi \sqrt{R^2-x^2} \stackrel{\text{sub: } y = \sqrt{R^2-x^2} \cos \varphi}{=} \frac{4\pi}{3} R^3$$



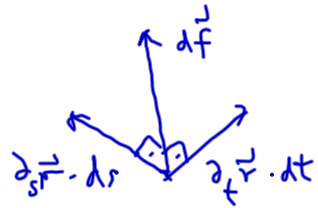
d) Oberflächenintegral

Beiträge zu einem 2-dim. Integral können entlang einer beliebigen Fläche in \mathbb{R}^3 aufgesammelt werden

Oberfläche S , parametrisiert als $\vec{r}(t,s) \in \mathbb{R}^3$
Koordinaten $(t,s) \in F \subseteq \mathbb{R}^2$



zum Bereich $[t, t+dt] \times [s, s+ds]$
gehört infinitesimale Fläche df ,
gegeben durch die Länge des Normalenvektors $d\vec{f}$



$$d\vec{f} = [\vec{r}(t+dt, s) - \vec{r}(t, s)] \times [\vec{r}(t, s+ds) - \vec{r}(t, s)]$$

$$(8.16) = (\partial_t \vec{r}(t, s) \times \partial_s \vec{r}(t, s)) dt ds =: \vec{n} df$$

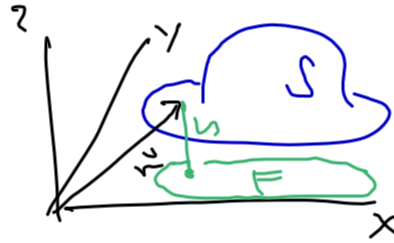
also:

$$df = |d\vec{f}| = |\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}| dt ds, \quad \vec{n} = \frac{\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}}{|\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}|} \quad (8.16')$$

$$\text{Integral: } \int_S df f(\vec{r}) = \int_F dt ds |\vec{r}' \times \vec{r}''| (t, s) f(\vec{r}(t, s)) \quad (8.17)$$

Beispiel:

Masse eines Huttes S
parametrisiere durch
Projektion in xy -Ebene:
 $(t, s) = (x, y)$



$$\vec{r}(x, y) \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in F$$

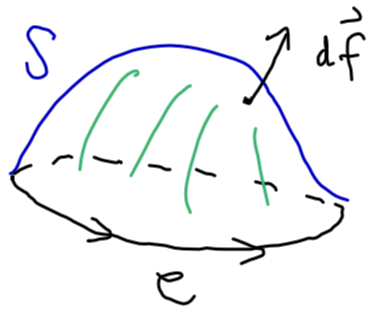
Massendichte
 $\sigma(x, y)$

$$M = \int_S df \sigma(\vec{r}) = \int_F d\vec{r} \quad |\dot{\vec{r}}_x \times \dot{\vec{r}}_y| \sigma(x, y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \quad \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y h \end{pmatrix} \right| \sigma(x, y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \quad \sqrt{1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2} \sigma(x, y)$$

Orientierung: Vorzeichenwahl von $d\vec{f}$ ist Konvention:



falls ohne Rand,
Zeige $d\vec{f}$ nach außen.

Notation: $\oint_S \dots$

Beispiel: Strom I durch eine Fläche S

vекторielle Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$

nur die zur Fläche senkrechte Komponente $\vec{j}_n = (\vec{j} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ trägt zu I bei:

Normalen-
einheits-
vektor

$$I = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j}_n(\vec{r}) = \int_S \underbrace{d\vec{f} \cdot \vec{n}(\vec{r})}_{\text{Normalenvektor}} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

$$= \int_F dt ds (\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}) \quad (6.18)$$

e) Volumen-Integral $I = \int_V d\vec{r} f(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz f(x,y,z) \quad (6.19)$

"Fluß von \vec{j} durch S "

VI.5 Krummlinige Koordinaten

zunächst im flachen Raum, zweidimensional

Beispiel: Polarkoordinaten $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

$$\vec{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

neue Basisvektoren:

$$\partial_r \vec{r} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \vec{e}_r b_r \quad \leadsto \quad b_r = 1$$

$$\partial_\varphi \vec{r} = r \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = \vec{e}_\varphi b_\varphi \quad \leadsto \quad b_\varphi = r$$

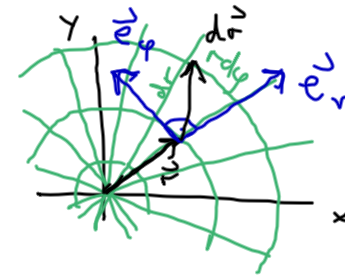
$$C_{r\varphi} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

Vorsicht: $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y \neq \vec{e}_r r + \vec{e}_\varphi \varphi$

Statt \vec{r} studiere besser Änderungen $d\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ etc.

$$d\vec{r} = \partial_x \vec{r} \cdot dx + \partial_y \vec{r} \cdot dy = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy \quad \leftarrow \vec{r}(x, y)$$

$$\stackrel{\text{oder}}{=} \partial_r \vec{r} \cdot dr + \partial_\varphi \vec{r} \cdot d\varphi = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi r d\varphi \quad \leftarrow \vec{r}(r, \varphi)$$



wichtig: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$
sind ortabhängig,
nicht definiert bei $\vec{r}=0$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dr - rs d\varphi \\ s dr + rc d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

teile durch dt bei Kurven: ↑
Funktional- oder Jacobi-Matrix

$$\dot{\vec{r}} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\varphi r \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$v^2(t) = \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Linienelement: $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \quad (6.22)$
 $= \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} (dt)^2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) (dt)^2$

Flächenelement: $df = dx dy = r dr d\varphi \quad (6.23)$

↑ Vorsicht: kein übliches Produkt!

Anwendungen:

- Kugelvolumen: $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r \sqrt{R^2 - r^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr (-\frac{1}{3}) \partial_r (R^2 - r^2)^{3/2} = \frac{4\pi}{3} R^3$

- Gauß-Integral: $I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-r^2/a^2} = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} = a^2 \cdot 2\pi \int_0^\infty dr (\frac{1}{2}) \partial_r e^{-r^2}$

→ Trick: $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{a^2}} \right)^2 \rightarrow I_1 = \sqrt{\pi} \cdot a \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\pi} a \right| = \pi a^2 \quad (6.24)$

allgemeine Situation:

krummlinige Koordinaten im \mathbb{R}^2 , $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad [\text{nicht } \vec{r} \doteq (u, v) \text{ schreiben!}]$$

• Basisvektoren:

$$\partial_u \vec{r} = \vec{e}_u b_u, \quad \partial_v \vec{r} = \vec{e}_v b_v \quad \text{so dass} \quad \begin{cases} \vec{e}_u^2 = \vec{e}_v^2 = 1 \\ \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = c_{uv} \end{cases}$$

d.h. $b_u(u, v) = |\partial_u \vec{r}|$, $b_v(u, v) = |\partial_v \vec{r}|$ (6.25)

• Differenzial: $d\vec{r} = \partial_u \vec{r} du + \partial_v \vec{r} dv = \vec{e}_u b_u du + \vec{e}_v b_v dv$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x du + \partial_v x dv \\ \partial_u y du + \partial_v y dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =: J \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

oder auch $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$ (6.26)

$$\hookrightarrow (dx, dy) = (du, dv) \cdot J^T$$

• Linienelement:

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (du, dv) J^T J \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

$$= (\partial_u \vec{r} du + \partial_v \vec{r} dv)^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} b_u^2 & c_{uv} \\ c_{uv} & b_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

in der letzten Metrik

$$G = \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_u^2 & b_u b_v c_{uv} \\ b_v b_u c_{uv} & b_v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u x \\ \partial_u y & \partial_u y \end{pmatrix} = J^T \cdot J \quad (6.27')$$

also:

$$(ds)^2 = g_{uu} (du)^2 + 2g_{uv} du dv + g_{vv} (dv)^2 = g_{ij} du_i du_j$$

mit $i, j \in \{u, v\} = \{u_1, u_2\}$ und $g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$ (6.27'')

Kurven in \mathbb{R}^2 : $\vec{r}(t) \rightsquigarrow (x(t), y(t)) \rightsquigarrow (u(t), v(t)) \rightsquigarrow du_i = \dot{u}_i dt$

$$ds = \sqrt{g_{ij} du_i du_j} = \sqrt{g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j} dt = v(t) dt \quad \text{mit } v^2 = (\dot{u}, \dot{v}) G (\dot{u}, \dot{v}) \quad (6.28)$$

wichtige Kurvenintegrale:

Bogenlänge $s(1,2) = \int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt v = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j}$ (6.29) (6.30)

Wirkemenge $w(1,2) = \int_1^2 \vec{p} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}^2 = m \int_{t_1}^{t_2} dt g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j$

Flächenelement:

(siehe $\vec{r}(u,v) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v)=0 \end{pmatrix}$ wie Oberfläche, nur mit $z=0$
mit (u,v) statt (t,s)) $\in \mathbb{R}^3$

$$df = |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}| du dv = \sqrt{(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r})^2} du dv$$

$$= \sqrt{(\partial_u \vec{r})^2 (\partial_v \vec{r})^2 - (\partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r})^2} du dv$$

$$= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix}} du dv = \sqrt{\det G} du dv$$

$$= \sqrt{\det J^T J} du dv = \sqrt{\det J^T \cdot \det J} du dv = |\det J| du dv \quad (6.31)$$

das heißt:

Jacobi-Determinante

$$dx dy = \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \quad \text{mit} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv J$$

Substitutionsregel:

(6.32)

$$\int_F dx dy f(x,y) = \int_{\tilde{F}} du dv \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| f(x(u,v), y(u,v))$$

Beispiel Polarkoordinaten: $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \rightarrow |\det J| = \sqrt{\det G} = \underline{r}$$

$$\rightarrow dx dy = \underline{r \cdot dr d\varphi}$$

Verkettung: $(x, y) \mapsto (u, v) \mapsto (t, s)$

$$dx dy = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \right| dt ds$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} & \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \end{pmatrix} \right| dt ds$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{pmatrix} \right| dt ds$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \end{pmatrix} \right| dt ds$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} \right| dt ds = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \right| dt ds \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1}$$

inverse
Jacobi-
Matrix

Erweiterung auf 3 Dimensionen

$$(x, y, z) \mapsto (u, v, w) \quad \vec{r} = (u, v, w)$$

alles analog zu 2 Dimensionen: J, G sind 3×3 Matrizen

Linienelement entsprechend

Volumenelement

$$\begin{aligned} dV = dx dy dz &= \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \\ &= |(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}) \cdot \partial_w \vec{r}| du dv dw \end{aligned} \quad (6.33)$$

Oberflächenelement, Einbettung einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{r} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{hatten wir schon: } \vec{r}(t, s), \quad \nabla \vec{r}$$

$$df = |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}| du dv = \sqrt{\det G} du dv \quad \text{mit } g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$$

Beispiel: Kugelkoordinaten $(x, y, z) \mapsto (r, \vartheta, \varphi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} = \underline{r}$$

$[0, \infty]$ $[0, \pi]$ $[0, 2\pi]$

$$\partial_r \underline{r} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \partial_\vartheta \underline{r} = r \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi \underline{r} = r \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alle orthogonal}$$

$$b_r = 1$$

$$b_\vartheta = r$$

$$b_\varphi = r \sin \vartheta$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \partial_r \underline{r} & \partial_\vartheta \underline{r} & \partial_\varphi \underline{r} \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{J}^T \underline{J} = \underline{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2$$

$$\dot{\underline{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$$

(6.34)

$$|\det \underline{J}| = \sqrt{\det \underline{G}} = r^2 \sin \vartheta$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = -r^2 dr d(\cos \vartheta) d\varphi =: r^2 dr d\Omega \quad (6.35)$$

Anwendungen

- Kugeloberfläche $r = R = \text{konst.}$

$$df = \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=R} = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$F: \begin{matrix} (\vartheta, \varphi) \\ \swarrow \quad \searrow \\ [0, \pi) \times [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$A_R = \int_{S^2} df = \int_F R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = R^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \quad \checkmark$$

- Kugelvolumen $r \in [0, R]$ sowie $(\vartheta, \varphi) \in S^2$

$$V_R = \int_{B^3} dV = \int_0^R dr \, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} = 4\pi \left. \frac{1}{3} r^3 \right|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \checkmark$$

Parametrisierte Oberfläche — gekrümmt oder flach?

gegeben Koordinaten (u, v) und Metrik $g_{ij}(u, v) \rightarrow$ Vermessung

Antwort (Gauß): berechne Krümmung $K(u, v)$.

Für orthogonale Koordinaten ($g_{12} = 0$):

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\partial_1^2 g_{11} - \partial_2^2 g_{22} + \frac{1}{g_{11}} [\partial_1 g_{11} \partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{11} \partial_2 g_{11}] + \frac{1}{g_{22}} [\partial_2 g_{22} \partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{22} \partial_1 g_{22}] \right\} \quad (6.36)$$

falls die Fläche eingebettet ist: $\vec{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3$
 $\leadsto g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$, $\vec{n} = \frac{\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}}{|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}|}$, $h_{ij} = \vec{n} \cdot \partial_{ij} \vec{r}$
 dann ist $K = \det H / \det G \xrightarrow{\text{G.37}}$

Beispiel Rotationsflächen

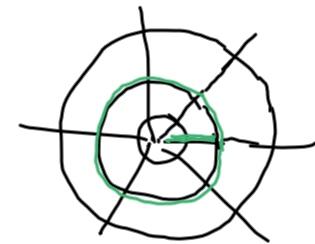
Polarkoordinaten (ρ, ϕ) mit Metrik $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\rho)^2 \end{pmatrix}$

Gauß-Formel ergibt $K = -f''/f$

Vermessung: $(ds)^2 = (d\rho)^2 + f(\rho)^2 (d\phi)^2$

- Speiche: $d\phi = 0$ $\int_0^r ds|_{\text{speiche}} = \int_0^r d\rho = r$

- Kreis: $d\rho = 0$ $\int_0^{2\pi} ds|_{\text{kreis}(r)} = \int_0^{2\pi} d\phi f(\rho)|_{\rho=r} = 2\pi \cdot f(r)$



Einbettung $\vec{r}(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} f(\rho) \cos \phi \\ f(\rho) \sin \phi \\ h(\rho) \end{pmatrix} \leadsto G = \begin{pmatrix} f'^2 + h'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$

wähle $g_{\phi\phi} = 1 \leadsto h'^2 + f'^2 = 1 \leadsto h(\rho) = \int d\rho \sqrt{1 - f'^2}$

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} -h'_c \\ -h'_s \\ f' \end{pmatrix} \rightsquigarrow H = \begin{pmatrix} fh'' - f''h' & 0 \\ 0 & fh' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f''/h' & 0 \\ 0 & fh' \end{pmatrix}$$

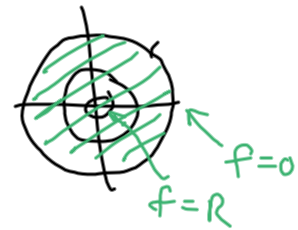
$$\rightsquigarrow K = \frac{\det H}{\det G} = \frac{-f''f}{f^2} = -\frac{f''}{f}$$

konkreter Fall: Pseudosphäre $K = -\frac{1}{R^2} < 0$ konst.

$$f(\rho) = R e^{-\rho/R}$$



$$f \in [0, R]$$



$$h(\rho) = \int_0^\rho dp' \sqrt{1 - e^{-2\rho'/R}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{v}}{1-\sqrt{v}} - \sqrt{v} \quad \text{mit} \quad \sqrt{v} \equiv \sqrt{1 - e^{-2\rho/R}}$$

Graph der Rotationsfläche: plote h über f

$h(f)$ wie $h(\rho)$, bloß mit $\sqrt{v} \equiv \sqrt{1 - f^2/R^2}$



↳ „Traktrix“ (\rightarrow hyperbolische Geometrie)

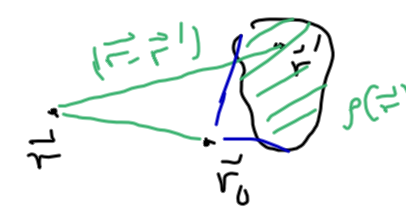
VI.6 Delta-Funktion

Beschreibung von Massen- oder Ladungsdichten von Objekten, die nicht dreidimensional sind

Bsp.: Gravitationspotential eines Massenpunktes M bei \vec{r}_0

$$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\gamma m \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

↑
Testmasse



wie muß $\rho(\vec{r}')$ beschaffen sein, damit das stimmt?

notwendig: $\rho(\vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \neq \vec{r}_0$ konzentriert

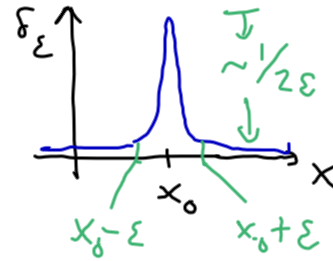
$$\int d^3r' \rho(\vec{r}') = M \quad \text{Gesamtmasse}$$

vereinfachte Diskussion auf eine Dimension

gesucht ist „Funktion“ $\rho(x)$ mit
$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \forall x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = 1 \end{cases}$$

∇ solche Funktion, aber näherungsweise

$$p_\varepsilon(x) =: \delta_\varepsilon(x-x_0)$$



Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ existiert nicht
als Funktion, aber verallgemeinerte

Funktion, sog. „Distribution“ $\delta_0(x-x_0) =: \delta(x-x_0)$

[erfunden von Dirac (Physik), präzisiert von Schwarz (Ma.)]

wird eigentlich nur unter dem Integral gebraucht

Definition: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$ (6.38)

für alle vernünftigen Funktion f : „ δ erschlägt ein Integral“
(„Testfunktion“)

verschiedene Darstellungen von δ_ε :

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Kastenfunktion}$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2} \quad \text{Gaußfunktion}$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \frac{\sin x/\varepsilon}{x/\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-x/\varepsilon}^{+x/\varepsilon} dk \cos kx$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \frac{1}{1 + (x/\varepsilon)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx - \varepsilon|k|}$$

Lorentz-Kurve

(6.39)

Konstruktionsprinzip:

nehme irgendeine Funktion $g(x)$, deren Integral existiert,

mit $g(0) \neq 0$.

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon I} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{mit} \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \quad (6.40)$$

Eigenschaften

(S. 41)

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-x_0) = 1$$

$$(ii) \int_a^b dx \delta(x-x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0) & x_0 = a \text{ oder } x_0 = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(iii) \delta(-x) = \delta(x)$$

$$(iv) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$(v) \delta(h(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|h'(x_n)|} \quad \text{mit } h(x_n) = 0, h'(x_n) \neq 0$$

$$(vi) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-a) \delta(x-b) = \delta(a-b)$$

$$(vii) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta'(x-x_0) f(x) = -f'(x_0)$$

$$(viii) \Theta'(x) = \delta(x) \quad \text{mit } \Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Heaviside-
oder
Stufenfunktion

$$(ix) \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x) = \frac{1}{x}$$

zu (v):

für eine Nullstelle x_0 mit $h'(x_0) > 0$

wähle Intervall $a < x_0 < b$, in dem $y = h(x)$ umkehrbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(h(x)) = \int_a^b dx f(x) \delta(h(x)) = \int_{h(a)}^{h(b)} dy \frac{f(x(y))}{h'(x(y))} \delta(y)$$

Substitution: $h(x) = y \rightarrow h'(x) dx = dy$

$$\parallel \begin{matrix} y=0 \\ x=x_0 \end{matrix} \curvearrowright$$

falls $h'(x_0) < 0$ gibt es ein Vorzeichen

$$\frac{f(x_0)}{h'(x_0)} \quad \checkmark$$

falls es mehrere Nullstellen gibt, ist über diese zu summieren

zu (vi)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-a) \delta(x-b) f(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

zu (vii) partielle Integration:

$$\int dx f(x) \delta'(x-x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx f(x) \partial_x \delta_{\varepsilon}(x-x_0) \stackrel{\text{p.i.}}{=} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \partial_x f(x) \delta_{\varepsilon}(x-x_0)$$

$$\text{Spezialfall: } f(x) = x : x \delta'(x) = \underbrace{[x \delta(x)]}' - x' \cdot \delta(x) = -\delta(x)$$

" 0

Von einer Dimension zurück nach drei Dimensionen
in kartesischen Koordinaten

$\delta(x)$ reduziert $\int d^3r \rightarrow \int dy dz$ yz -Ebene
 $\delta(x)\delta(y)$ reduziert $\int d^3r \rightarrow \int dz$ z -Achse
 $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ reduziert $\int d^3r$ auf Punkt $\vec{r}=0$

„Träger“

allgemeiner: $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ für punktförmigen Träger

Eigenschaft:
$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \quad (6.42)$$

in krummlinigen Koordinaten

$$\begin{aligned}
 f(\vec{r}_0) &= \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz f(x,y,z) \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \\
 &= \int du dv dw \underbrace{f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))}_{\text{Wechsel}} \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \\
 &= \int du dv dw g(u,v,w) \delta(u-u_0) \delta(v-v_0) \delta(w-w_0) = g(u_0, v_0, w_0)
 \end{aligned}$$

$\rightarrow \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(u-u_0) \delta(v-v_0) \delta(w-w_0) / \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \quad (6.43)$