

MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION & KRUMMLINIGE KOORDINATEN

Diese Übungen werden noch korrigiert, aber nicht mehr zurück gegeben. Sie können damit Bonuspunkte erwerben und Ihr Konto für die Studienleistung aufbessern. Bitte beachten Sie: Klausurrelevant ist der gesamte Stoff der Vorlesung und damit auch *alle* Übungsaufgaben, die mit Bleistift und Papier gelöst werden können.

[H35*] Donut**[4* Punkte]**

Betrachten Sie in der xz -Ebene einen Kreis vom Radius R , dessen Mittelpunkt von der z -Achse den Abstand $a > R$ hat. Durch Rotation dieses Kreises um die z -Achse entsteht ein Torus. Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Torus-Oberfläche, indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Formeln anwenden auf die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t, s) \doteq ((a+R \cos s) \cos t, (a+R \cos s) \sin t, R \sin s).$$

[H36*] Krummlinige Koordinaten I**[1* + 2* + 2* + 1* = 6* Punkte]**

Das Differential $d\phi(\vec{r})$ eines skalaren Feldes ϕ in zwei Dimensionen lautet

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} \\ &= \partial_x \phi dx + \partial_y \phi dy \\ &= \partial_u \phi du + \partial_v \phi dv, \end{aligned} \quad (*)$$

wobei einmal $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ und ein andermal $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ verwendet wurde. Wenn die Umrechnung der Koordinaten bekannt ist, $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$, dann hängen die Koordinaten-Differentiale (dx, dy) und (du, dv) über die Jacobi-Matrix J zusammen.

(a) Nutzen Sie dies, um auch den Gradienten $(\partial_x \phi, \partial_y \phi)$ durch $(\partial_u \phi, \partial_v \phi)$ auszudrücken. Vorsicht:

$$(\partial_u \phi, \partial_v \phi) \neq \vec{\nabla}\phi!$$

(b) Geben Sie J , $|\det J|$, $G = J^T J$, $(ds)^2$, dA und $\vec{\nabla}\phi$ an für Polarkoordinaten

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

(c) Das gleiche, wie in (b), aber nun für parabolische Koordinaten

$$(x, y) = (uv, \frac{1}{2}(v^2 - u^2)).$$

(d) Leiten Sie mit Hilfe von $\partial_u \vec{r} = \vec{e}_u b_u$ und $\partial_v \vec{r} = \vec{e}_v b_v$ auch eine Formel für den Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y$ von der Form $\vec{\nabla} = (\vec{e}_u, \vec{e}_v) M \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix}$ ab. Drücken Sie die Matrix M durch G und (b_u, b_v) aus.

Hinweis: Schreiben Sie die Linearkombinationen in (*) als Zeile mal Spalte und folgern Sie damit

$$(\partial_x \phi, \partial_y \phi) = (\partial_u \phi, \partial_v \phi) \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}.$$

[C9*] Krummlinige Koordinaten II**[1* + 1* + 1* + 2* = 5* Punkte]**

Wir betrachten einen Koordinatenwechsel wie in [H36*], aber nun in drei Dimensionen, $(x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$.

(a) Schreiben Sie eine Prozedur, die die Jacobimatrix J berechnet und ausgibt. Dafür dürfen Sie natürlich nicht die in MATHEMATICA eingebaute Funktion `JacobianMatrix` verwenden.

(b) Schreiben Sie Prozeduren, die für das Koordinatensystem (u, v, w) die Einheitsvektoren \vec{e}_u, \vec{e}_v und \vec{e}_w berechnen, sowie Prozeduren, die die Streckfaktoren b_u, b_v und b_w ausgeben.

(c) Betrachten Sie konkret Kugelkoordinaten $(u, v, w) = (r, \vartheta, \varphi)$, also

$$(x, y, z) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$$

Berechnen Sie J , $|\det J|$, $G = J^T J$, $(ds)^2$, dA .

(d) Programmieren Sie eine allgemeine Prozedur für den Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten und geben Sie damit $\vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten an. *Hinweis:* Zur Überprüfung sei verraten, dass für ein skalares Feld $\phi(\vec{r})$ in drei Dimensionen $\vec{\nabla}\phi = (\partial_r \phi) \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta \phi) \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \phi) \vec{e}_\varphi$ gilt.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!