KLAUSUR :: AUFGABEN

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Bearbeiten Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

[K1] *Kraftfeld* **[$1+1+1+1=4$ Punkte]**

Betrachten Sie in zwei Dimensionen das Potential $V(\vec{r}) = -(\vec{a}\cdot\vec{r})/r$, wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist.

(a) Geben Sie das zugehörige Kraftfeld an.
(b) Zeigen Sie, dass die Kraft senkrecht auf dem Ortsvektor steht, dass also $\vec{F}\perp\vec{r}$ ist.
(c) Was bedeutet dies für die Arbeit, die bei einer radialen Bewegung verrichtet werden muss?
(d) Wie sehen die Äquipotentiallinien aus? Fertigen Sie hierfür eine Skizze mit $\vec{a}=\vec{e}_2$ an.

[K2] *Hauptachsen* **[$1+1+1+1=4$ Punkte]**

Eine Masse m befinde sich in einem zweidimensionalen Kraftfeld, das am Ort $\vec{r}\doteq\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ die folgende Kraft besitzt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m\omega^2\hat{H}\vec{r} \quad \text{mit} \quad H = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Hauptachsen des Kraftfeldes.
(b) Geben Sie die Drehung D an, unter der die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$ eine einfachere (welche?) Gestalt annimmt.
(c) Bestimmen Sie zu den Anfangsbedingungen $\vec{r}\,'(0) = 0$ und $\dot{\vec{r}}\,'(0) \doteq \left(\begin{smallmatrix}0\\v\end{smallmatrix}\right)$ die Lösung der Bewegungsgleichung $\vec{r}\,'(t)\doteq\left(\begin{smallmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{smallmatrix}\right)$ im Hauptachsensystem.
(d) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

[K3] *Arbeit* **[$2+1+1=4$ Punkte]**

Auf einen Massepunkt der Masse m wirkt die ortsabhängige Kraft

$$\vec{F}(x,y) \doteq -m\omega^2\begin{pmatrix}5x+3y\\3x\end{pmatrix} \doteq -\vec{\nabla}V(x,y).$$

(a) Welche Energie $A=\int_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}$ gewinnt das Teilchen auf einem Weg entlang eines Viertelkreises $\mathcal{C}$ von $\left(\begin{smallmatrix}R\\0\end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix}0\\R\end{smallmatrix}\right)$?
(b) Bestimmen Sie das Potential V.
(c) Überprüfen Sie, dass $A = V(R,0)-V(0,R)$ ist.

[K4] *Differentialgleichung* **[$2+1+1+1=5$ Punkte]**

Bei einem Schlitten hänge die Reibungskraft von der Zeit ab, so dass

$$\dot{v}(t) = -\frac{\gamma}{1+\alpha t}v(t) \quad \text{mit} \quad \alpha,\gamma,t>0.$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an.
(b) Welche bekannte Lösung ergibt sich im Grenzfall $\alpha\to 0$?
(c) Der Schlitten erfahre zusätzlich eine konstante Beschleunigung g. Machen Sie einen Ansatz mit einer linearen Funktion, um eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung zu erhalten.
(d) Wie lautet die Lösung des inhomogenen Problems für die Anfangsbedingung $v(0)=0$?

[K5] *Gravitation* **[$2+2+1=5$ Punkte]**

Im dreidimensionalen Raum sei eine ringförmige Masseverteilung in der xy-Ebene mit Radius R und konstanter Massendichte $\sigma =$ Masse pro Länge gegeben.

(a) Geben Sie das Gravitationspotential $V(z)$ an, das eine Raumsonde der Masse m bei Bewegung entlang der Symmetrieachse $(x=y=0)$ erfährt. *Hinweis*: Zylinderkoordinaten (ρ',φ',z') mit $x'=\rho'\cos\varphi'$, $y'=\rho'\sin\varphi'$ und $\mathrm{d}^3r' = \rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}z'$. Es ist dann $V(z)\equiv V(\vec{r}=z\vec{e}_z) = -\gamma m\int\mathrm{d}^3r'\,\frac{\delta(\rho'-R)\delta(z')\sigma}{|z\vec{e}_z-\vec{r}\,'(\rho',\varphi',z')|}$.
(b) Mit welcher Kreisfrequenz ω führt die Raumsonde kleine harmonische Schwingungen um den Ursprung aus?
(c) Welche Mindestgeschwindigkeit v_∞ müsste sie am Ursprung haben, um das System für immer verlassen zu können?

[K6] *Indexnotation* **[3 Punkte]**

Gegeben seien die antisymmetrischen Matrizen A und B mit Elementen $A_{ij}=\varepsilon_{ijk}a_k$ und $B_{lm}=\varepsilon_{lmn}b_n$, sowie die Dyade $\hat{C}=\vec{c}\circ\vec{c}$. Drücken Sie den Skalar $\mathrm{Sp}(ABC)$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

[K7] *Bahnkuve* **[$1+2+1=4$ Punkte]**

Ein Auto fahre mit konstanter Geschwindigkeit v_0. Eines seiner Räder mit Radius R rolle auf der x-Achse nach rechts ab. Zur Zeit $t=0$ befinde sich ein Farbklecks auf dem Rad genau am Ursprung. *Hinweis*: Zweidimensionales Problem.

(a) Welche Winkelgeschwindigkeit ω hat das Rad?
(b) Welchen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ und welche Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ hat der Farbklecks?
(c) Geben Sie den führenden Term der ersten Komponente $x(t)$ von $\vec{r}(t)$ für $\omega t\ll 1$ an.

[K8] *Keine Energieerhaltung* **[$1+2=3$ Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Potential $V(\vec{r},t)=f(t)W(\vec{r})$, dessen Wert sich mit der Zeit ändert.

(a) Wie lautet die Bewegungsgleichung?
(b) Was ergibt sich daraus für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+fW)$?