

## NACHKLAUSUR :: AUFGABEN

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Bearbeiten Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

**[K1] Kraftfeld** **[2 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Betrachten Sie in zwei Dimensionen das Potential  $V(\vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r})/r^3$ , wobei  $\vec{a}$  ein konstanter Vektor ist.

- Geben Sie das zugehörige Kraftfeld an.
- Geben Sie die Ortsvektoren  $\vec{r}$  an, für die die Kraft senkrecht auf ihnen steht, also  $\vec{F} \perp \vec{r}$  ist.
- Wie sehen die Äquipotentiallinien aus? Fertigen Sie hierfür eine Skizze mit  $\vec{a} = \vec{e}_2$  an.

**[K2] Hauptachsen** **[2 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Ein Schlitten der Masse  $m$  gleite mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} \doteq \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$  auf einer Fläche mit anisotroper Reibungskraft

$$\vec{F} \doteq -m\alpha \begin{pmatrix} 2u + 2w \\ 2u + 5w \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie Hauptachsen der Fläche und fertigen Sie eine Skizze an. *Hinweis:* zweidimensionales Problem!
- Geben Sie die Drehung  $D$  an, unter der die Bewegungsgleichung  $m\vec{v} = \vec{F}$  eine einfachere (welche?) Gestalt annimmt.
- Bestimmen Sie für die Anfangsgeschwindigkeit  $\underline{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$  die Lösung der Bewegungsgleichung  $\underline{v}'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$  im Hauptachsensystem.

**[K3] Arbeit** **[1 + 2 + 1 = 4 Punkte]**

Eine Rakete der Masse  $m$  fliege vom Ursprung aus entlang der positiven  $x$ -Achse nach  $\infty$ .

- Parametrisieren Sie den Weg  $\vec{r}(s)$  so einfach wie möglich. *Hinweis:* zweidimensionales Problem!
- Gegen die Anziehungskraft eines Sterns der Masse  $M$  bei  $\vec{r}_0 \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$  muss Arbeit  $A$  verrichtet werden. Berechnen Sie explizit das Kurvenintegral für  $A$ . *Hinweis:*  $\partial_s \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \dots$
- Geben Sie das Potential  $V(\vec{r})$  an. Überprüfen Sie, dass  $A = V(\infty, 0) - V(0, 0)$  ist.

**[K4] Differentialgleichung** **[2 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte]**

Die Anzahl  $N(t)$  von Kernen eines radioaktiven Elementes hängt von der Zerfallsrate  $\tau^{-1}$  und der Produktionsrate  $\alpha$  in folgender Weise ab:  $\tau \dot{N}(t) = -N(t) + \tau\alpha t$  mit  $N(0) = 0$ .

- Lösen Sie diese Differentialgleichung: allgemeine Lösung des homogenen Problems bestimmen, spezielle Lösung des inhomogenen Problems mit linearem Ansatz finden, Anfangsbedingung nutzen.
- Mit welcher Potenz von  $t$  beginnt  $N$  zu wachsen?
- Wie verhält sich  $N$  für große Zeiten  $t \gg \tau$ ?
- Erfüllt Ihre Lösung die Erwartung für stabile Kerne ( $\tau \rightarrow \infty$ )?

**[K5] Gravitation** **[2 + 2 + 1 = 5 Punkte]**

Zwei (punktförmige) gleiche Sterne, Masse jeweils  $M$ , bilden ein Doppelsternsystem. Im Schwerpunktsystem liegen die Sterne fest bei  $(0, 0, -a)$  und  $(0, 0, +a)$  auf der  $z$ -Achse.

- Geben Sie das Gravitationspotential  $V(\vec{r})$  an. *Hinweis:* Superposition.
- Mit welcher Kreisfrequenz  $\omega$  führt eine Raumsonde der Masse  $m$  auf der  $x$ -Achse kleine harmonische Schwingungen aus? *Hinweis:*  $\ddot{x} = -\omega^2 x + \mathcal{O}(x^2)$ .
- Welche Mindestgeschwindigkeit  $v_\infty$  müsste sie am Ursprung haben, um das System für immer verlassen zu können? *Hinweis:* Energiesatz.

**[K6] Indexnotation** **[3 Punkte]**

Gegeben seien drei antisymmetrische Matrizen  $A, B$  und  $C$  mit Elementen  $A_{ij} = \varepsilon_{ijl} a_l$ ,  $B_{jk} = \varepsilon_{jkm} b_m$  und  $C_{ki} = \varepsilon_{kin} c_n$ . Drücken Sie den Skalar  $\text{Sp}(ABC)$  durch die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.

**[K7] Bahnkuve** **[4 Punkte]**

Ein Teilchen der Masse  $m$  und Ladung  $q$  bewege sich auf der Bahnkurve  $\vec{r}(t) \doteq \begin{pmatrix} R \sin(\omega t) + v_0 t \\ \gamma t^2 \\ -R \cos(\omega t) \end{pmatrix}$ . Es ist bekannt, dass die

Bewegung in räumlich und zeitlich konstanten elektrischen und magnetischen Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stattfindet. Die Kraft ist auf das Teilchen ist dann  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ . Bestimmen Sie die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Sind alle Komponenten der Felder eindeutig festgelegt?

**[K8] Fluss durch eine Oberfläche** **[2 + 1 = 3 Punkte]**

Ein unendlich langer geladener Draht entlang der  $z$ -Achse erzeugt ein elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho$  in Zylinderkoordinaten, also  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\vec{e}_\rho \doteq \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- Betrachten Sie ein Rotationsparaboloid der Höhe  $H$ , d.h.  $-H \leq z = h(x, y) = -\alpha(x^2 + y^2) \leq 0$ . Geben Sie das vektorielle Flächenelement  $d\vec{A}$  an.
- Berechnen Sie den Fluss  $\Phi = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}$  durch das Rotationsparaboloid.