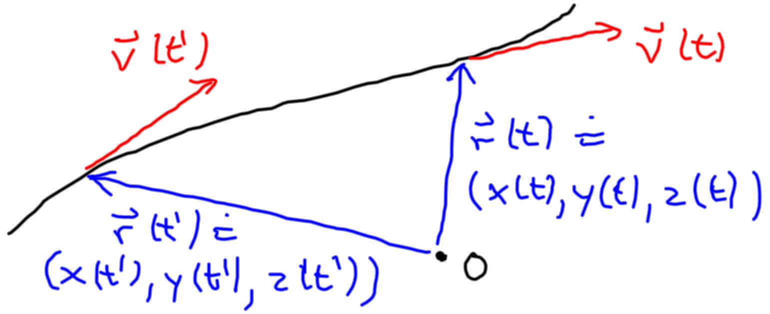
II. Kinematik

II.1 Raumkurven

Vektorfunktion

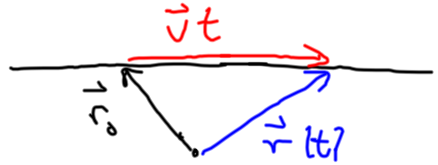
$$\vec f(t) \doteq (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$



Beispiele:

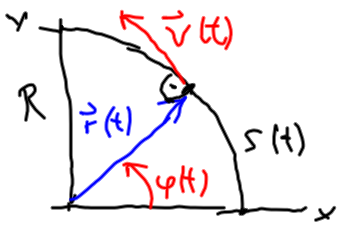
- geradlinig, konstante Geschwindigkeit $\vec v$, zur Zeit $t=0$ sei $\vec r(0) = \vec r_0$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\vec r(t) = \vec r_0 + \vec v t \doteq (x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t, z_0 + v_3 t) \qquad (2.1)$$



Parameterdarstellung einer Geraden

- Kreisbewegung in xy-Ebene um Ursprung, im positiven Drehsinn, mit konstantem $v = |\vec v|$

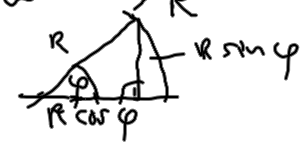


Start $t=0$: $\varphi = 0$

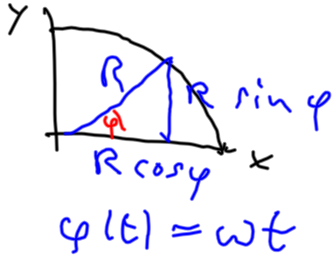
Bogenlänge $s(t) = vt$

Winkel $\varphi(t) = \frac{s(t)}{R} = \frac{vt}{R} = \omega t$

Winkel-Geschw. $\omega = v/R$



$$\vec{r}\,(t) \doteq R\,(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0) \qquad (2.2)$$



Periode $T = 2\pi/\omega$ weil $\vec{r}\,(t+T) = \vec{r}\,(t)$

Geschwindigkeit: $\vec{v} \perp \vec{r} \rightsquigarrow \vec{v} \parallel \vec{e}_3 \times \vec{r}$

$$v = R\omega$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \vec{e}_v \rightsquigarrow \vec{v} = v\,\vec{e}_v = R\omega\,\vec{e}_v$$

$$\vec{v}\,(t) \doteq R\omega\,(-\sin\omega t,\ \cos\omega t,\ 0) \qquad (2.3)$$

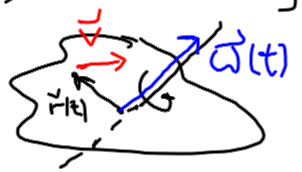
alternativ: $\vec{v}\,(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) \doteq (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$

gilt allgemein: $\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) \qquad (2.4)$

- Schraubenlinie (in z-Richtung)

$$\vec{r}\,(t) \doteq (R\cos\omega t,\ R\sin\omega t,\ v_3 t) \qquad (2.5)$$

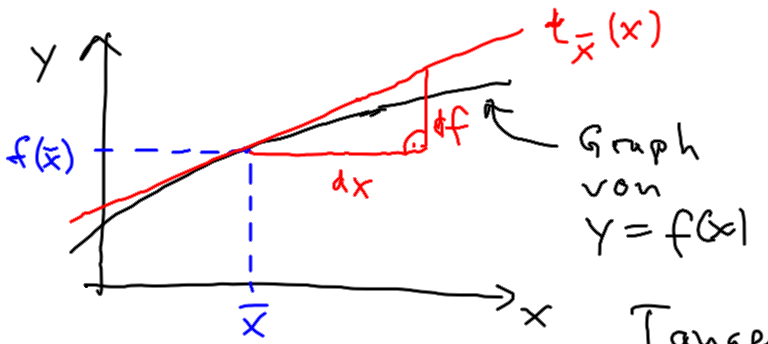
Bemerkung zu Kreisbewegung: i.a. ist ω ein Vektor



Geschw. $\vec{v}\,(t) = \vec{\omega}\,(t) \times \vec{r}\,(t) \qquad (2.6)$

Winkelgeschw. $\vec{\omega}\,(t) = \omega\,(t) \cdot \vec{e}_{Achse}(t)$

II.2 Differenzieren

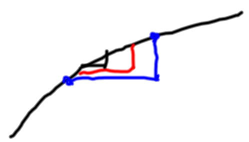


Ableitung von $f(x)$ bei $\bar{x}$
= Anstieg des Graphen bei $x = \bar{x}$
= Steigung der Tangente bei $\bar{x}$

Tangente: $t_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + a \cdot (x - \bar{x})$

Notation: $a = a(\bar{x}) =: f'(\bar{x})$

Ableitung



$$f'(\bar{x}) = (\partial_x f)(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})}{\varepsilon} \qquad (2.7)$$

Grenzwert Differenzialquotient

df, dx heißen „Differenziale"

andersherum:

Terme, die wie ε^2 gegen Null gehen

$$\left.\begin{aligned} f(\bar{x}+\varepsilon) &= f(\bar{x}) + \varepsilon \cdot f'(\bar{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ df &= f'(\bar{x}) \cdot dx \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

Differenzieren = Bilden der Ableitung für jedes $\bar{x}$

Ergebnis: Ableitungsfunktion $f'(\bar{x})$ von $\bar{x}$

Ableiten ist eine Operation $f \mapsto f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f$

"$\frac{d}{dx}$" oder "∂_x"

Funktionswerte sind $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = (\partial_x f)(x)$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$

$$\partial_x \sqrt{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sqrt{x+\varepsilon}^2 - \sqrt{x}^2}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{x} + \varepsilon - \cancel{x}}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon}(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

genauso: $\partial_x (x^n) = n x^{n-1}$

$\partial_x \cos x = -\sin x$

$\partial_x \sin x = \cos x$

Leibniz-Regel oder Produktregel

Produktfunktion $h = f \cdot g \Leftrightarrow h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\partial_x (f \cdot g)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[f(x+\varepsilon) g(x+\varepsilon) - f(x) g(x) \right]$$

$$\overset{(2.8)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\{ f(x) + \varepsilon f'(x) \} \{ g(x) + \varepsilon g'(x) \} - f(x) g(x) \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Big[\cancel{f(x) g(x)} + \varepsilon f'(x) g(x) + \varepsilon f(x) g'(x) + \underbrace{\varepsilon^2 f'(x) g'(x)}_{O(\varepsilon^2)} - \cancel{f(x) g(x)} \Big]$$

$$(f \cdot g)'(x) = (f' \cdot g)(x) + (f \cdot g')(x) \qquad (2.9)$$

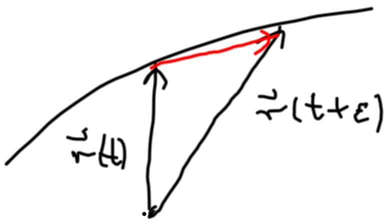
Differenzieren einer Vektorfunktion

$$\vec{k}(t) \doteq (k_1(t), k_2(t), k_3(t))$$

Änderungsvektor

$$\partial_t \vec{k}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\vec{k}(t+\varepsilon) - \vec{k}(t)}{\varepsilon} = \frac{d\vec{k}}{dt}(t) = \dot{\vec{k}}(t)$$

$$\doteq (\dot{k}_1(t), \dot{k}_2(t), \dot{k}_3(t)) \doteq \vec{e}_i \dot{k}_i(t)$$



für $\vec{x} = \vec{r}$; (2.4?)

Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})(t)$

Beschleunigung $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ (2.10)

$= (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})(t)$

Rechenregeln:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t(\vec{a}+\vec{b}) = \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}}, \quad \partial_t(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}} \\ &\partial_t(\lambda\vec{a}) = \dot{\lambda}\vec{a} + \lambda\dot{\vec{a}}, \quad \partial_t(\vec{a}\times\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}} \end{aligned}\right\} (2.11)$$

Tricks:

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \text{constant} \overset{(2.9)}{\rightsquigarrow} \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} = -\vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}$

  z.B.: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{e}$, $\vec{e}^2 = 1 \rightsquigarrow \vec{e}\cdot\dot{\vec{e}} = 0$

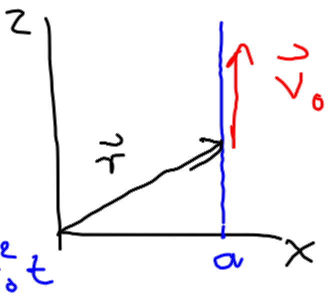
- $\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}} = \frac{1}{2}\partial_t(\vec{a}\cdot\vec{a}) = \frac{1}{2}\partial_t a^2 = a\dot{a} \rightsquigarrow \dot{a} = \frac{\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}}{a}$

Anwendung: nehme $\vec{r}$ für $\vec{a}$

$\rightsquigarrow \dot{r} = \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r} = \dot{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{e}_r = \vec{v}\cdot\vec{e}_r = v_{\parallel} \neq v$

Beispiele:

- geradlinige Bewegung nach oben



$\vec{r}(t) \doteq (a, v_0 t)$ $\quad r = \sqrt{a^2 + v_0^2 t^2}$

$\dot{\vec{r}}(t) \doteq (0, v_0)$ $\quad v = v_0 \quad \neq \quad \dot{r} = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{a^2 + v_0^2 t^2}}$

$\ddot{\vec{r}}(t) \doteq (0, 0)$ $\quad a = 0$

- Kreisbewegung $\qquad c := \cos\omega t, \quad s := \sin\omega t$

$\vec{r}(t) \doteq R\,(c, s)$ $\quad r = R \qquad \dot{r} = 0$

$\dot{\vec{r}}(t) \doteq R\omega\,(-s, c)$ $\quad v = R\omega \quad \neq \quad \dot{v} = 0$

$\ddot{\vec{r}}(t) \doteq R\omega^2(-c, -s) \doteq -\omega^2 \vec{r}(t)$ $\quad a = R\omega^2 \qquad \dot{a} = 0$

- begleitendes Dreibein einer Raumkurve $\vec{r}(t)$

$\vec{t} = \dot{\vec{r}}/v$ Tangenten-Einheitsvektor (2.12) $\quad |\vec{t}\,|^2 = 1$

$\dot{\vec{t}} = \dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})/v^3 = v\kappa\,\vec{n}$ (2.13) $\quad \vec{n}$ = Normale, $|\vec{n}|^2 = 1$

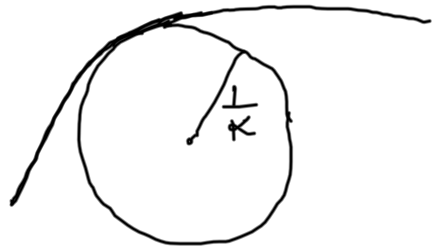
$\dot{\vec{n}} = -v\kappa\vec{t} + v\tau\,\vec{b}$ (2.14) $\quad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ = Binormale, $|\vec{b}|^2 = 1$

$\dot{\vec{b}} = -v\tau\,\vec{n}$

$$\kappa = |\ddot{\vec{r}}_\perp| / v^2$$ Krümmung $\quad 1/\kappa$ Krümmungsradius

$$= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{v^3} \qquad (2.15)$$

$$\tau = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$$



Torsion

Frénet-Formel:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = -v \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

(2.16)

II.3 Kettenregel und Gradient

sei $h(x) := f(g(x)) = f(y)$ mit $y = g(x)$

$h = f \circ g \qquad x \xmapsto{g} y = g(x) \xmapsto{f} f(y) = f(g(x)) = h(x)$

differenziere:

$$(\partial_x h)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[h(x+\varepsilon) - h(x)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(\underline{g(x+\varepsilon)}) - f(g(x))\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(\underbrace{g(x) + \overbrace{\varepsilon g'(x)}^{\delta}}) - f(g(x))\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(\underbrace{y+\delta}) - f(y)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\underbrace{\cancel{f(y)} + \delta \cdot f'(y)} - \cancel{f(y)}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\overbrace{\varepsilon g'(x)}^{\delta} \cdot f'(g(x))\right]$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\partial_y f)(g(x)) \cdot (\partial_x g)(x) \qquad (2.17a)$$

anders: $\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{d(f \circ g)}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx} \qquad (2.17b)$

Vorsicht: $\underset{h'(x)}{\underset{\shortparallel}{f(g(x))'}} = f'(g(x)) = f'(y)$ falsch!

Funktionen mehrerer Variabler

$f(x,y,z)$ $\qquad (\partial_x f)(x,y,z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x+\varepsilon,y,z)-f(x,y,z)\right]$

partielle Ableitung

genauso $\partial_y f$, $\partial_z f$ entsprechend

Verkettung $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z(t)$ $\rightsquigarrow$ $\underset{\displaystyle h(t)}{\overset{\|}{f(\vec r(t))}}$

Ableitung:

$$\partial_t h = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[f(x(t+\varepsilon),y(t+\varepsilon),z(t+\varepsilon)) - f(x(t),y(t),z(t))\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[f\left(x(t)+\varepsilon\dot x(t), y(t)+\varepsilon\dot y(t), z(t)+\varepsilon\dot z(t)\right) - f(x(t),y(t),z(t))\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\left[-f(x,y+\varepsilon\dot y,z+\varepsilon\dot z)+f(x,y+\varepsilon\dot y,z+\varepsilon\dot z) - f(x,y,z+\varepsilon\dot z)+f(x,y,z+\varepsilon\dot z)\right]\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&f(x+\varepsilon\dot x)-f(x)\\ &=\varepsilon f'(x)\cdot\dot x\end{aligned}}$$

$$= (\partial_x f)(x,y,z)\cdot\dot x + (\partial_y f)(x,y,z)\cdot\dot y + (\partial_z f)(x,y,z)\cdot\dot z$$

also:

$$\partial_t f(\vec{r}(t)) = \dot{x}(t)\,\partial_x f(\vec{r}(t)) + \dot{y}(t)\,\partial_y f(\vec{r}(t)) + \dot{z}(t)\,\partial_z f(\vec{r}(t))$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} (\vec{r}(t)) \doteq \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \qquad (2.18)$$

„Nabla"

Gradient einer Funktion

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) \doteq (\partial_x f(x,y,z), \partial_y f(x,y,z), \partial_z f(x,y,z))$$

anschaulich:

gegeben Potenzial $V(\vec{r})$

Äquipotenzialfläche $V(\vec{r}) = \text{const} \rightsquigarrow \vec{r} \in$ Fläche

Trick: betrachte Kurve $\vec{r}(t)$ in der Ä-Fläche

es gilt: $0 = \partial_t V(\vec{r}(t)) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}(t))$

tangential an Ä-Fläche $\qquad \perp$ Ä-Fläche

$\Rightarrow \vec{\nabla} V \perp$ Ä-Fläche