III. Dynamik

III.1 Kraftfelder

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ Newton 2 (3.1)

benötige Kraftgesetz $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = ?$

Strategie: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \xrightarrow{(3.1)} \vec{r}(t)$ „Mechanik"

Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)\right)$ Lorentzkraft (3.2)

umgekehrt: $\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{Maxwell}} \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$ „E-Dynamik"

Bemerkungen:

- $\vec{F} = 0 \curvearrowright \ddot{\vec{r}} = 0 \curvearrowright \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{\text{konstant}} =: \vec{v} \curvearrowright \vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}_0}_{\vec{r}(0)} + \vec{v}t$

  definiert ein Inertialsystem Newton 1
- m ist positives Skalar, „träge Masse", Eigenschaft des Teilchens
- $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ hängt nicht ab von $\ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}$, etc. / $\vec{F}(\vec{r}, t)$ „Kraftfeld"

Newton 2 = gekoppeltes System von 3 gewöhnlichen Differenzialgleichungen 2. Ordnung in $\vec{r}(t)$

eindeutige Lösung erfordert Anfangsbedingungen

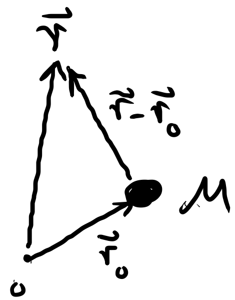
$\swarrow$ eine Funktion $\vec{r}(t)$ für $t > t_0$ $\qquad\qquad$ $\swarrow$ $\vec{r}(t_0)$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$

Fall 1 $\quad$ freie Fall (auch Würfe)

Gravitations-Kraftgesetz:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}\, \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_0} = -\underbrace{\gamma}_{\text{Konstante}}\, m \underbrace{M}_{\text{Erdmasse}} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \qquad (3.3)$$

$$\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_0} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$



wähle Ursprung auf Erdoberfläche: $\vec{r}_0 = -R\,\vec{e}_3$ $\qquad$ (R = Erdradius $\approx$ 6370 km)

Näherung nahe der Erdoberfläche: $|\vec{r}| \ll R$, $\quad \frac{|\vec{r}|}{R} \ll 1$

$$\vec{F}(\vec{r}) \doteq -\gamma m M \frac{(x, y, z+R)}{[x^2+y^2+(z+R)^2]^{3/2}} = -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z+R}{R}\right)}{\left[\left(\frac{x}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{z+R}{R}\right)^2\right]^{3/2}}$$

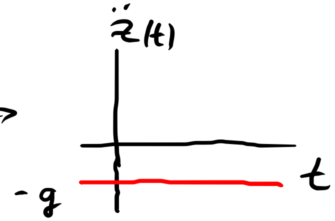
$$\approx -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{(0,0,1)}{[0^2+0^2+1^2]^{3/2}} \doteq -mg\,\vec{e}_3 \quad \text{mit } g = \gamma M/R^2 \qquad (3.4)$$

mit m = „schwere Masse"

wähle AW: Herunterfallen lassen $\begin{cases} \vec{r}(0) \doteq (0,0,h) \\ \dot{\vec{r}}(0) \doteq (0,0,0) \end{cases}$

Newton 2: $\cancel{m}\,(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) = -\cancel{m}g\,(0,0,1)$

in Komponenten: $\ddot{x}=0\,,\quad \ddot{y}=0\,,\quad \ddot{z}=-g \quad (*)$



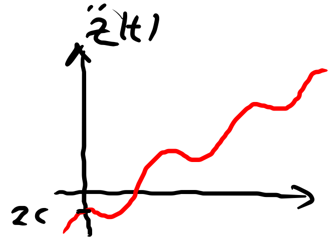
Lösung: $x(t)=0\,,\quad y(t)=0\,,\quad z(t)=\,?$

AW: $z(0)=h\,,\quad \dot{z}(0)=0 \quad (+)$

Ansatz: z.B.: $z(t) = A + B\cdot t + C\cdot t^2 + D\cdot t^3 + E\sin\omega t$

Einsetzen: $\dot{z}(t) = B + 2Ct + 3Dt^2 + E\omega\cos\omega t$

$\ddot{z}(t) = 2C + 6Dt - E\omega^2\sin\omega t$



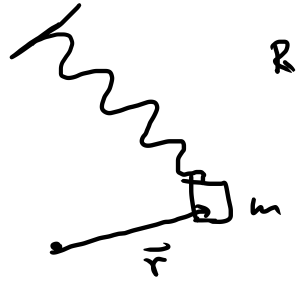
Vergleich mit $(*)$: $2C=-g\,,\quad D=0\,,\quad E=0$

Vergleich mit $(+)$: $0=\dot{z}(0)=B\,,\quad h=z(0)=A$

$z(t) = A + Bt - \frac{1}{2}gt^2$

eindeutige Lösung: $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ (3.5)

Fall 2 : harmonischer Oszillator



Ruhe: $\vec{r} = \vec{r}_0$

Hooke : $\vec{F}(\vec{r}) = -k(\vec{r}-\vec{r}_0)$ (3.6)

wähle $\vec{r}_0 = 0$

Newton: $m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -k(x, y, z)$

für die x-Komponente: $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ ⊗

Ansatz: $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ • A, B, ω zu finden

Einsetzen: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ ∘

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t = -\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$\overset{!}{\underset{⊗}{=}} -\frac{k}{m}x \overset{\bullet}{=} -\frac{k}{m}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Vergleich: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, A, B beliebig

es fehlen die AW, z.B.: $\vec{r}(0) = \vec{r}_1$, $\dot{\vec{r}}(0) = 0$ also: $x(0) = x_1$, $\dot{x}(0) = 0$

Einsetzen in • und ∘ : $A = x_1$, $B\omega = 0$

zusammen: $x(t) = x_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \longrightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$ (3.7)

III.2 Impuls und Drehimpuls

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$ (3.8)

$\rightarrow$ Newton 2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (3.9)

falls $\vec{F} = 0 \rightsquigarrow \dot{\vec{p}} = 0 \rightsquigarrow \vec{p} = \overrightarrow{\text{konst}}$ Impulserhalten

2-Teilchen-System, isoliert:

Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{\text{konst}}$

Schwerpunktsbewegung:

$$\vec{R}_s := \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \quad \text{mit} \quad M = m_1 + m_2$$

$$\dot{\vec{R}}_s = \frac{1}{M}(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{M}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{P}/M = \vec{V} = \overrightarrow{\text{konst}}$$

$$\rightsquigarrow \vec{R}_s(t) = \vec{R}_s(0) + t \cdot \vec{V}$$

Drehimpuls: $\vec{L} := m\vec{r}\times\underset{=\dot{\vec{r}}}{\vec{v}} = \vec{r}\times\vec{p}$ (3.10)

abhängig vom Bezugspunkt (hier $\vec{r}_0 = 0$)

mit Newton 2: $\dot{\vec{L}} = \cancel{m\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}} + m\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\times\vec{F} =: \vec{N}$ Drehmoment

(3.11)

$\vec{N} = 0$ falls $\vec{F} = 0$ <u>oder</u> $\vec{F}\parallel\vec{r}$, d.h.

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\cdot\vec{e}_r$$ Zentralkraft

2-Teilchen-System, isoliert:

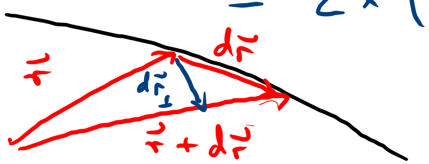
es gilt: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \overrightarrow{\text{konst}}$ Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

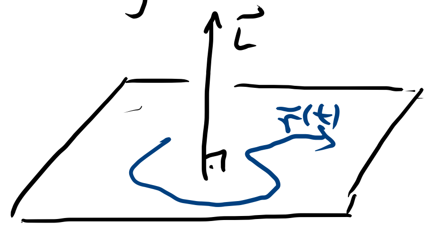
(bei gleichem Bezugspunkt)

geometrische Interpretation:

- $\vec{r}\cdot\vec{L} = \vec{r}\cdot(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = 0 \xrightarrow{\vec{L}=\overrightarrow{\text{konst}}}$ Ebenengleichung für $\vec{r}(t)$
- $\frac{1}{m}L = |\vec{r}\times\dot{\vec{r}}| = r\cdot v_\perp = r\left|\frac{d\vec{r}_\perp}{dt}\right|$

$= 2\times$ (in dt überstrichene Fläche Δ) $/dt$





← 2. Keplersches Gesetz

III.3 Energie und Potenzial

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \Big| \cdot \dot{\vec{r}} \quad \curvearrowright \quad \underbrace{m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}}_{=\,\partial_t\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2\right)} = \underbrace{\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}}_{=\,\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{F}} \qquad \text{(3.12)}$$

Leistung

kinetische Energie $\quad T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \qquad$ (3.13)

Wenn $\exists$ Funktion $V(\vec{r})$ („Potenzial"), so dass

$$\vec{F}(\vec{r}, \cancel{\dot{\vec{r}}}, \cancel{t}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \qquad \text{(3.14)}$$

dann gilt $\quad \partial_t V(\vec{r}(t)) = \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{\nabla} V(\vec{r}(t)) \stackrel{(3.14)}{=} -\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{F}(\vec{r}(t))$

und somit $\quad \partial_t T = -\partial_t V$

kinetische + potenzielle Energie

$\curvearrowright$ Energie-Erhaltung: $\quad \partial_t (T+V) = 0 \quad$ auf Kurve $\vec{r}(t) \quad \Longleftrightarrow$

$$T + V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t)) = \text{konst.} =: E \qquad \text{(3.15)}$$

unabhängig von t

solche Kraftgesetze (mit Potenzial) heißen „konservativ"

Beispiele:

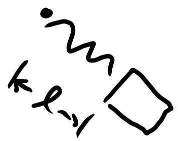
A) $\vec{F} \doteq (0, 0, -mg) \overset{?}{\doteq} (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$ Frage $\exists V(x,y,z)$?

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \partial_x V \\ 0 = \partial_y V \\ mg = \partial_z V \end{array} \right. \qquad \left.\begin{array}{l} 0 = \partial_x V \\ 0 = \partial_y V \end{array}\right\} \Longrightarrow V = V(z)$$

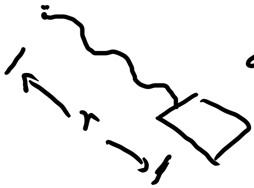
$$mg = V'(z) \rightsquigarrow V(z) = mgz + \underbrace{\cancel{C}}_{\text{Konstante} \to 0}$$

(3.16)

B) $\vec{F} = -\kappa (r - \ell) \vec{e}_r$



Ruhe



ausgelenkt

raten: $V(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2}(r - \ell)^2$?

Test: $\vec{\nabla} V(\vec{r}) \doteq \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} V(r) = \otimes$ nur Betrag von $\vec{r}$!

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r(x,y,z)$

($i = 1,2,3$ oder x,y,z)

nützlich: $\partial_i r = \partial_i \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial_i (x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2x_i}{2r} = \frac{x_i}{r}$ (oder $\frac{r_i}{r}$)

$$\rightsquigarrow \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \Longleftrightarrow \vec{\nabla} r = \vec{e}_r$$

(3.18)

$$\rightsquigarrow \vec{\nabla} f(r) = f'(r) \vec{\nabla} r = f'(r) \vec{e}_r$$

$$\otimes = V'(r) \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} \doteq \kappa (r - \ell) \vec{e}_r \qquad \checkmark$$

allgemein:

Zentralkraft: $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, \vec{e}_r \quad \longleftrightarrow \quad \dot{\vec{L}} = 0$

konservative Kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \longleftrightarrow \quad \dot{E} = 0$

beides: konservative Zentralkraft:

$$\vec{F} = f(r)\, \vec{e}_r \quad \text{oder} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} V(r) \quad \text{und} \quad f = -V' \qquad (3.19)$$

C) $\vec{F} = -\gamma \dfrac{mM}{r^2} \vec{e}_r$ konservative Zentralkraft

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \qquad (3.20)$$

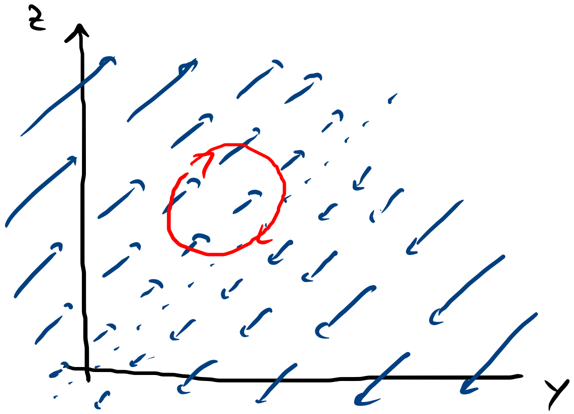
D) $\vec{F} \doteq \kappa(-x,\, z-y,\, z-y)$ $\quad \exists V$?

$$-F_x = \kappa x \overset{!}{=} \partial_x V \rightsquigarrow V = \frac{\kappa}{2} x^2 + f(y,z)$$

$$-F_y = \kappa y - \kappa z \overset{!}{=} \partial_y V = \partial_y f \rightsquigarrow f(y,z) = \frac{\kappa}{2} y^2 - \kappa y z + g(z)$$

$$-F_z = \kappa y - \kappa z \overset{!}{=} \partial_z V = \partial_z\left(\frac{\kappa}{2} x^2 + f(y,z)\right) \overset{!}{=} -\kappa y + g'(z)$$

$\Rightarrow$ Widerspruch! $\quad \lightning \quad \nexists V \quad \rightsquigarrow \quad g'(z) = 2\kappa y - \kappa z$



bei $x=0$: $\vec{F} \doteq \alpha\,(0, z-y, z-y)$

allgemein: $\exists$ notwendige Bedingung

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \underset{F_i = -\partial_i V}{\Longrightarrow} -\partial_i \partial_j V = -\partial_j \partial_i V \quad \checkmark$$

falls $\neq$ $\Longrightarrow$ auch $\neq$ $\rightsquigarrow$ $\nexists V$

$$\Longleftrightarrow \quad \partial_i F_j - \partial_j F_i = 0 \qquad \text{für } (i,j) = (1,2), (1,3), (2,3)$$

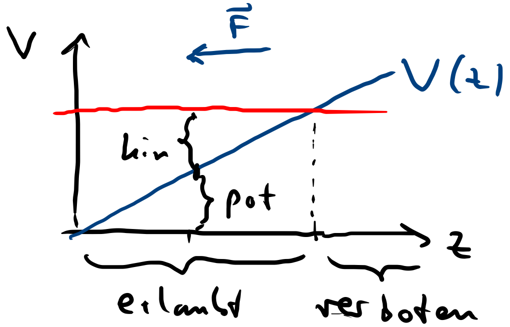
$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{ijk}\, \partial_i F_j = 0 \qquad \text{für } k = 3, 2, 1$$

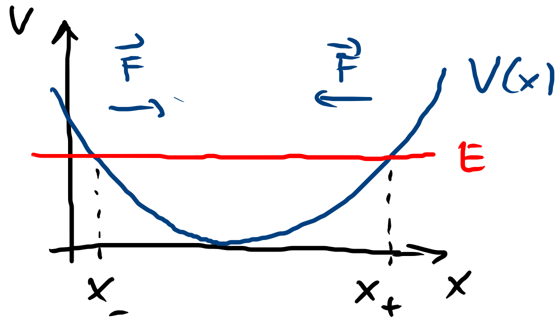
$$\Longleftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \qquad \text{„Rotation" von } \vec{F} \tag{3.21}$$

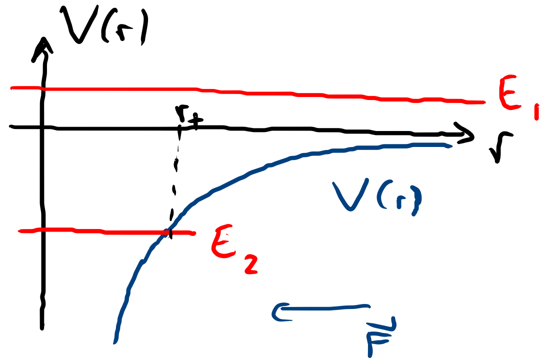
↑ Nabla

III.4 Eindimensionale Bewegung mit dem Energiesatz

Bewegungstyp aus Potenzial ablesbar, z.B.







erlaubte Bewegung: $V(x) \leq E$, $\quad E - V(x) = T(x) = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$

Umkehrpunkte: $V(x_\pm) = E \iff T(x_\pm) = 0$

Lösung mit dem Energiesatz (statt Newton 2)

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - V(x) \rightsquigarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \rightsquigarrow dx = \dot{x}\, dt = \pm \sqrt{\ldots}\, dt \rightsquigarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\ldots}} \rightsquigarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} dt' = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \rightsquigarrow t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \qquad (3.22)$$

dies liefert $t = t(x) \xrightarrow{\text{umkehren}} x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$

statt $\dot{x}(t_0)$ ist E vorgegeben

gebundene Bewegung ist periodisch, mit Periode

$$T(E) = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

mit Umkehrpunkten $x_\pm$

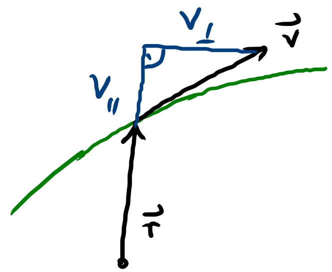
(3.23)

III.5 Dreidimensionale Bewegung unter konservativer Zentralkraft

Teilchen unter Einfluß $\vec{F}(r) = -\vec{\nabla} V(r)$

erhalten sind $L = m v_\perp r$ und $E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r)$

$\vec{L} = \overrightarrow{konst} \leadsto$ Bewegung in Ebene $(z = 0 \Leftrightarrow \vartheta = \pi/2)$



$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ (bezgl. $\vec{r}$) $\leadsto$ $v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$ mit $v_\parallel = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \dot{r}$

eliminiere $v_\perp = L/mr$. Jetzt Energieerhaltung:

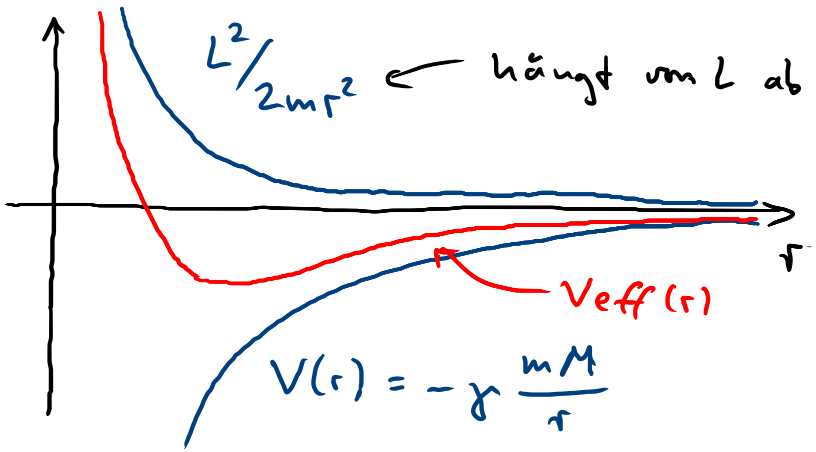
$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{V_{eff}(r)} \qquad (3.24)$$

„effektives Potenzial“

$L^2/2mr^2$ heißt Zentrifugalbarriere

Beispiel Gravitationspotenzial:



eindimensionales Ersatzproblem mit $V_{eff}(r)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)} \\ r\dot{\varphi}(t) &= v_\perp = \frac{L}{mr(t)} \end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

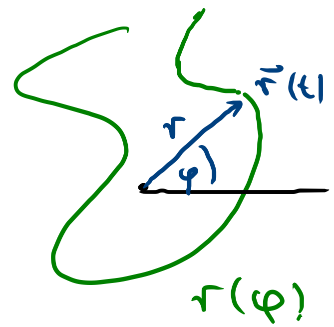
$$\vartheta = \pi/2 \qquad \text{(Ebene)}$$

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \quad \longrightarrow \quad r(t) \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{r^2(t')} \quad \longrightarrow \quad \varphi(t) \quad (3.26)$$

→ Parameterdarstellung der Bahn: $r(t)$, $\varphi(t)$, $\vartheta(t) = \pi/2$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dt}{dr} = \dot{\varphi}/\dot{r} \overset{(3.25)}{=} \frac{L}{mr^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - V_{eff}(r')}} \quad \longrightarrow \quad \varphi(r) \quad \longrightarrow \quad r(\varphi) \quad (3.27)$$



Schwingungsperiode bei gebundener Bewegung (zwischen r_+ & r_-)

$$T = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}} \qquad (3.28)$$

zugehöriger Winkel ist

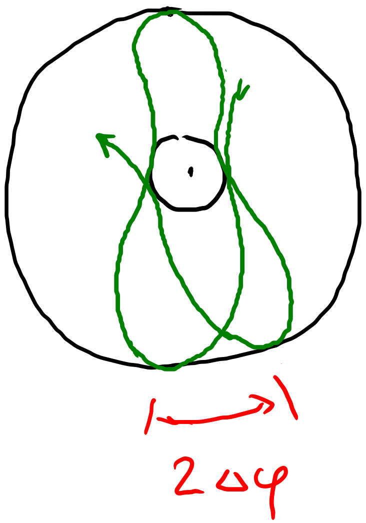
$$\Delta\varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

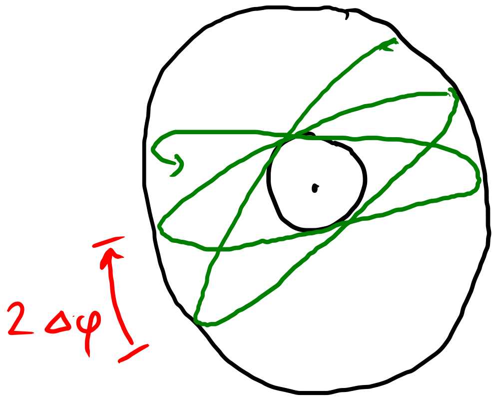
Bahn ist geschlossen falls

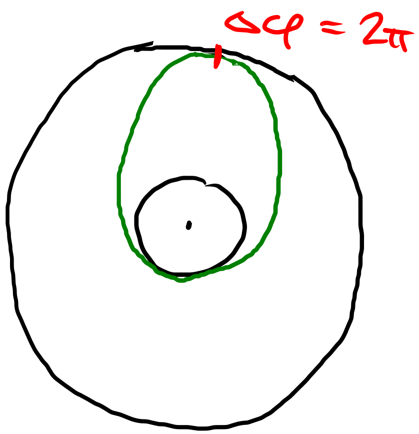
$$k \cdot \Delta\varphi = n \cdot 2\pi$$

für zwei $k, n \in \mathbb{Z}$

Beispiele:







Ausnahme

III.6 Keplerproblem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (3.29)$$

$\alpha > 0$ attraktiv

$\alpha < 0$ repulsiv

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$$

$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

$\dot{\vec{e}}_r = ?$

Erhaltungssätze:

- Energie $\quad E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{\alpha}{r} \qquad (1)$
- Drehimpuls $\quad \vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \qquad (3)$
- Runge-Lenz-Vektor $\quad \vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \vec{e}_r \qquad (3) \qquad (3.30)$

Beweis für $\vec{A}$:

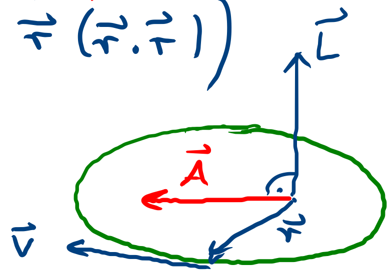
$$\dot{\vec{A}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \cancel{\dot{\vec{L}}}^{\,0} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}^{\,2} = r^2\right)$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = \frac{\vec{F}}{m} \times \vec{L} = -\frac{\alpha}{m}\frac{1}{r^3}\vec{r} \times (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = -\frac{\alpha}{r^3}\Big(\vec{r}\,\underbrace{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}_{r\dot{r}} - \dot{\vec{r}}\,\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r})}_{r^2}\Big)$$

$$= -\frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\vec{r} + \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{A}} = 0$$



Ausnutzen:

$$\vec{A}^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = \left(\dot{\vec{r}}\times\vec{L} - \frac{\alpha}{r}\vec{r}\right)^2$$

$$= (\dot{\vec{r}}\times\vec{L})^2 - \frac{2\alpha}{r}(\dot{\vec{r}}\times\vec{L})\cdot\vec{r} + \frac{\alpha^2}{\cancel{r^2}}\cancel{\vec{r}^2}$$

$$= \dot{\vec{r}}^2\vec{L}^2 - \cancelto{0}{(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{L})^2} - \frac{2\alpha}{r}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\cdot\vec{L} + \alpha^2$$

$$= \dot{\vec{r}}^2\vec{L}^2 - \frac{2\alpha}{r}\frac{1}{m}\vec{L}\cdot\vec{L} + \alpha^2$$

$$= \vec{L}^2\left(\dot{\vec{r}}^2 - \frac{2\alpha}{mr}\right) + \alpha^2 = \frac{2\vec{L}^2}{m}E + \alpha^2$$

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r}$$

$$\rightarrow \quad A = \alpha\sqrt{1 + \frac{2\vec{L}^2 E}{m\alpha^2}} =: \alpha\varepsilon \quad \leftarrow \text{numerische Exzentrizität} \qquad (3.31)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{L} = 0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{r} = (\dot{\vec{r}}\times\vec{L})\cdot\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\overbrace{\vec{r}\cdot\vec{r}}^{r^2} = (\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\cdot\vec{L} - \alpha r = \frac{\vec{L}^2}{m} - \alpha r$$

hängt nicht von φ ab

$\sphericalangle(\vec{A},\vec{r})$

$$\vec{A}\cdot\vec{r} = A r\cos\varphi \overset{(3.31)}{=} \alpha\varepsilon r\cos\varphi$$

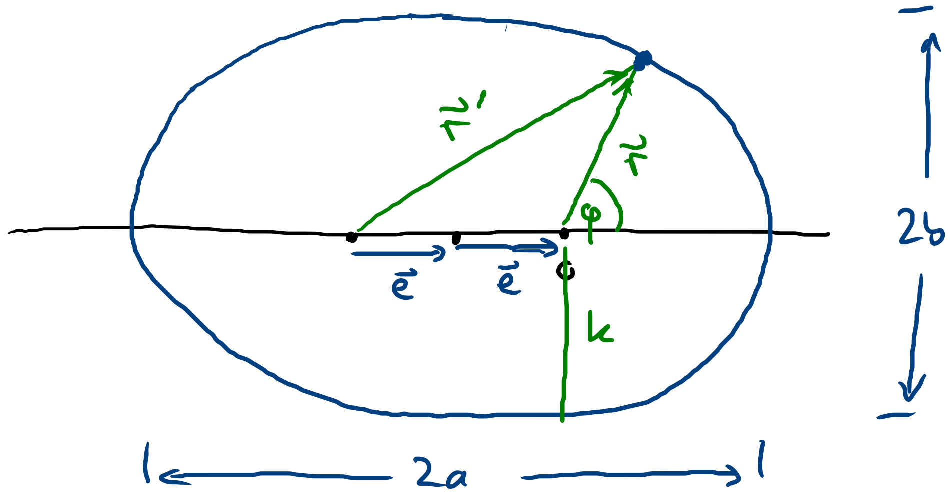
gleich

def: $k = L^2/m\alpha$

$$\rightarrow \quad \alpha k - \alpha r = \alpha\varepsilon r\cos\varphi \quad \rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad (3.32)$$

Polargleichung eines Kegelschnitts

Welche Kurve? Ellipse! (für $\varepsilon < 1$)



Ellipse: $r + r' = 2a$

$$r' = 2a - r$$
$$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2$$

aber auch

$$\vec{r}\,' = 2\vec{e} + \vec{r}$$
$$\vec{r}\,'^2 = 4\vec{e}^{\,2} + 4\vec{e}\cdot\vec{r} + \vec{r}^{\,2}$$
$$r'^2 = 4e^2 + 4er\cos\varphi + r^2$$

Vergleich:

$$a^2 - ar = e^2 + er\cos\varphi$$
$$r(a + e\cos\varphi) = a^2 - e^2 \qquad | \div a$$
$$r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = \frac{a^2 - e^2}{a} \overset{\otimes}{=} \frac{b^2}{a} = k$$
$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

Polardarstellung der Ellipse ($\varepsilon < 1$)

def.: $\varepsilon := \frac{e}{a} < 1$ $\oplus$

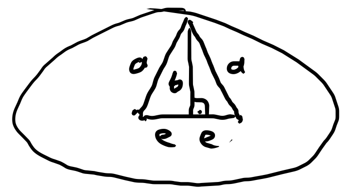
$k = b^2/a$

„Parameter"

falls $r = r'$

$r = a$

$a^2 = e^2 + b^2$ $\otimes$

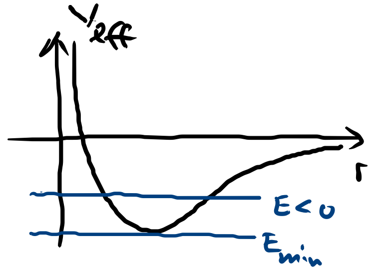


Physik: $k = L^2/m\alpha$ $\qquad \varepsilon = \sqrt{1 + 2L^2E/m\alpha^2}$

$$r(\varphi) = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\varphi} \quad \geq 0$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{1+\frac{2L^2E}{m\alpha^2}} \qquad e^2 = b^2 - a^2$$

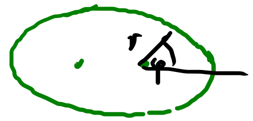
$$k = b^2/a = L^2/m\alpha \qquad \operatorname{sgn}(k) = \operatorname{sgn}(\alpha)$$



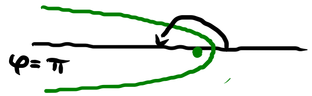
- $\varepsilon = 0$ $\quad r(\varphi) = k \quad$ Kreis: $\quad e = 0, \; b = a = k =: R, \; 1+\frac{2L^2E}{m\alpha^2} = 0 \iff E = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$

  $\alpha > 0, \; E < 0 \qquad L = \sqrt{m\alpha R}$

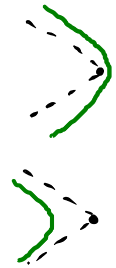
- $0 < \varepsilon < 1$ $\quad$ Ellipse: $\quad e < a, \; E < 0, \; k > 0, \; \alpha > 0$



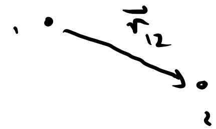
- $\varepsilon = 1$ $\quad r(\varphi) = \frac{k}{1+\cos\varphi} \quad$ Parabel: $\quad e = a, \; E = 0, \; k > 0, \; \alpha > 0$



- $1 < \varepsilon$ $\quad$ Hyperbel: $\quad e > a, \; E > 0$ $\quad$ → $k > 0, \; \alpha > 0$ / → $k < 0, \; \alpha < 0$



Zwei-Teilchen-System



$$\vec r_1,\ \vec r_2 \quad (m_1,\ m_2) \longrightarrow \quad \vec R = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{M}, \quad \vec r = \vec r_1 - \vec r_2 =: \vec r_{12}, \quad M = m_1 + m_2 \qquad (3.33)$$

angenommen: $$\vec F_{12} = F(r_{12})\,\frac{\vec r_{12}}{r_{12}} = F(r)\,\vec e_r = \vec F(r) \overset{!}{=} -\vec F_{21} \qquad (3.34)$$

Bewegungsgleichungen

- Schwerpunktsbewegung
- Relativbewegung:

$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2 = \frac{1}{m_1}\vec F_{12} - \frac{1}{m_2}\vec F_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec F(r)$$

$$\curvearrowright \quad m\ddot{\vec r} = \vec F(r) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad (3.35)$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ „reduzierte Masse" (auch μ)

Rekonstruktion:

$$\vec r_1 = \vec R + \frac{m_2}{M}\vec r, \qquad \vec r_2 = \vec R - \frac{m_1}{M}\vec r \qquad (3.36)$$

Bsp. Planetenbewegung