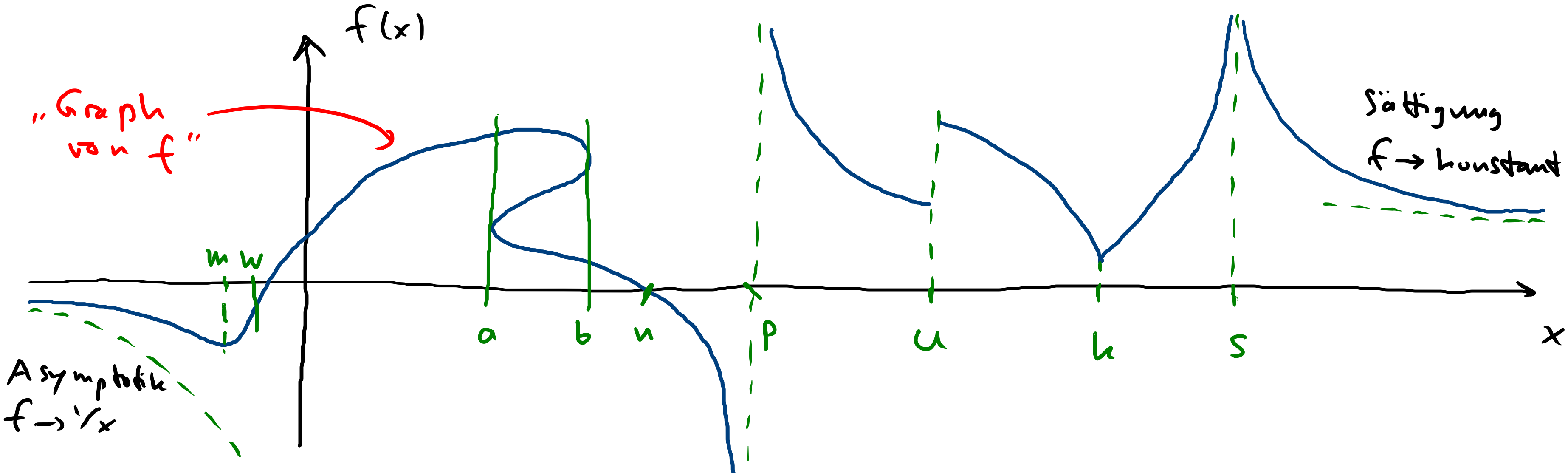
V. Funktionen

V.1 Allgemeines

Funktionen sind Abbildungen, in der Regel zwischen Kontinua

einfachster Fall: $f: \mathbb{R} \supseteq D \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}$ „von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$"



m Minimum, w Wendepunkt, [a,b] mehrwertig, n Nullstelle,

p Pol (einfacher), u Sprungstelle, k Knick, s Singularität

- verwandte Funktionen: aus gegebenen Funktion f gewinne...

- $f_1(x) = f(-x)$ an y-Achse gespiegelt
- $f_2(x) = -f(x)$ an x-Achse gespiegelt
- $f_3(x) = -f(-x)$ im Ursprung gespiegelt
- $f_4(x) = f(x-a)$ um a nach <u>rechts</u> verschoben
- $f_5(x) = f(x)+b$ um b nach <u>oben</u> verschoben
- $f_6(x) = f(c\cdot x)$ mit c-facher x-<u>Stauchung</u>
- $f_7(x) = d\cdot f(x)$ mit d-facher y-<u>Streckung</u>

Graph

gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$ Bsp.: $\frac{1}{1+x^2}$

ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$ Bsp.: $\tan x$

Umkehrfunktionen

f^{-1} definiert über $f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$ oder $f(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x}) = y$

$x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x$ $\qquad$ $y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x \overset{f}{\longmapsto} y$

Graph von f^{-1} aus Graph von f durch Spiegelung an der Diagonalen $y=x$

Die Ableitung von f^{-1} erhält man aus der Ableitung von f:

$$\partial_x \left[f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y}) = x \right] \overset{\text{Kettenregel}}{\longrightarrow} \partial_y f^{-1}(y) \cdot \partial_x f(x) = \partial_x x = 1$$

also: $$(f^{-1})'(y) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)} = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x})}$$

oder: $$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} \qquad (5.2)$$

Beispiele:

A) $f(x) = x^2 = y \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$

Teste (5.2): $\partial_y \sqrt{y} = \dfrac{1}{(\partial_x x^2)\big|_{x=\sqrt{y}}} = \dfrac{1}{(2x)\big|_{x=\sqrt{y}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ ✓

B) $f(x) = \sin x = y \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \arcsin y = x$

Anwendung von (5.2):

$$\partial_y \arcsin y = \frac{1}{(\partial_x \sin x)\big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{(\cos x)\big|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}\,\Big|_{\underset{\sin x = y}{\updownarrow}\, x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

V.2 Exponentialfunktion

beschreibt alle Wachstumsvorgänge, wenn:

Mengenänderung ist proportional zur Menge selbst

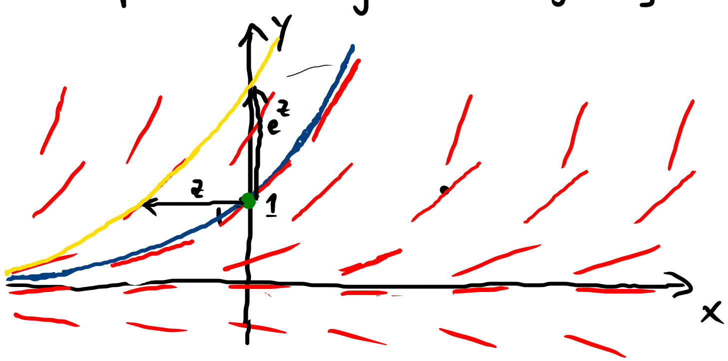
etwa: Bakterien-Anzahl $N(t)$ nehme zu nach $\dot{N} = \alpha N$

AW: $N(0) = N_0$ gegeben $\xrightarrow{N = N_0 f}$ $\frac{1}{\alpha}\partial_t(\cancel{N_0} f) = \cancel{N_0} f$

mache Argument dim'los: $x = \alpha t \leadsto f(x) \leadsto$ $\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \\ f(0) &= 1 \end{aligned}}$ (5.3)

Def.: $\exp(x)$ löst die Dgl. (5.3) mit AW $\longrightarrow$

Graph: trage Steigung am Punkt (x, y) im Graph $y = \exp(x)$ ein:



exp ist monoton steigend, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_+$

exp ist immer positiv $(f(x_0) = 0 \leadsto f(x) = 0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Funktionalgleichung: betrachte Hilfsfunktion $g(x) = \exp(x+z)$

$g'(x) = \exp(x+z) = g(x)$ aber $g(0) = \exp(z)$, also:

$g(x) = g(0)\cdot\exp(x) = \exp(z)\cdot\exp(x) \leadsto \exp(x+z) = \exp(x)\cdot\exp(z)$ (5.4)

Iteration von (5.4):

$$\exp(x) = \exp\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]^2$$

$$\exp(x) = \exp\left(\tfrac{x}{n}+\tfrac{x}{n}+\dots+\tfrac{x}{n}\right) = \left[\exp\left(\tfrac{x}{n}\right)\right]^n$$

$$\tfrac{x}{n} = z \quad \leftrightarrow \quad n = \tfrac{x}{z}$$

$$\left.\begin{array}{l} \exp(x) = \left[\exp(z)\right]^{x/z} = \left(\left[\exp(z)\right]^{1/z}\right)^x \\ \exp(1) = \left[\exp(z)\right]^{1/z} \quad \text{unabh. von } z\ ! \end{array}\right\} \exp(x) = (\exp(1))^x$$

nenne $\exp(1) =: e$

$\approx 2.71828\ldots$ Euler-Zahl

$$\rightsquigarrow \quad \exp(x) = e^x \qquad (5.5)$$

$$\rightsquigarrow \quad \exp(-x) = e^{-x} = 1/e^x = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \partial_x e^x = e^x, \quad \partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}, \quad \partial_x^n e^{\gamma x} = \gamma^n e^{\gamma x} \qquad (5.6)$$

Reihe:

versuche $f' = f$ per Polynom-Ansatz zu lösen:

$$f \overset{?}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 \quad \rightsquigarrow \quad f' = c_1 + 2c_2 x \overset{!}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 \quad \rightsquigarrow \text{ geht nicht}$$

$\rightsquigarrow$ addiere beliebig viele Potenzen, d.h. Polynom $\longrightarrow$ Potenzreihe

$$f(x) \overset{?}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (c_0 = 1)$$

einsetzen:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots \overset{!}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = f(x)$$

Koeffizientenvergleich: $n c_n = c_{n-1} \quad \rightsquigarrow \quad c_n = c_{n-1}/n$ Rekursion

eleganter:

$$f'(x) = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} \underbrace{c_n n}\, \underline{x^{n-1}} \overset{!}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \overset{m=n-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{c_{n-1}}\, \underline{x^{n-1}} = f$$

Lösung: $c_n = \frac{1}{n} c_{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} c_{n-2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\frac{1}{n-2}\cdot c_{n-3} = \ldots = \frac{1}{n!}\overset{1}{c_0} = \frac{1}{n!}$

also: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (5.7) $\qquad 0! = 1$

Konvergenz? überall, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$

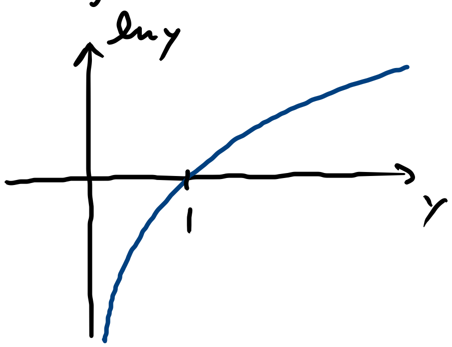
Asymptotik: $\lim_{x\to\infty} x^{-n} e^x = \infty \iff \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ (5.8)

Produktdarstellung: $e^x = (e^{x/n})^n \overset{\frac{x}{n}=\varepsilon}{=} (e^{\varepsilon})^n \overset{\varepsilon \ll 1}{\approx} (1+\varepsilon)^n = (1+\frac{x}{n})^n$

$$\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (5.9)$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(y) =: \ln y$ zu $y = f(x) = e^x$

Eigenschaften: $e^{\ln y} = y \,, \quad \ln e^x = x$ (5.10)



ln y definiert nur für $y > 0$

$$\partial_y \ln y = \frac{1}{(\partial_x e^x)\big|_{x=\ln y}} = \frac{1}{e^x\big|_{x=\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\ln(xy) = \ln\left(e^{\ln x} \cdot e^{\ln y}\right) = \ln\left(e^{\ln x + \ln y}\right)$$
$$= \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^a) = \ln\left(e^{a \ln x}\right) = a \ln x$$

$$\partial_x a^x = \partial_x \left(e^{x \ln a}\right) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x \,, \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \,,$$

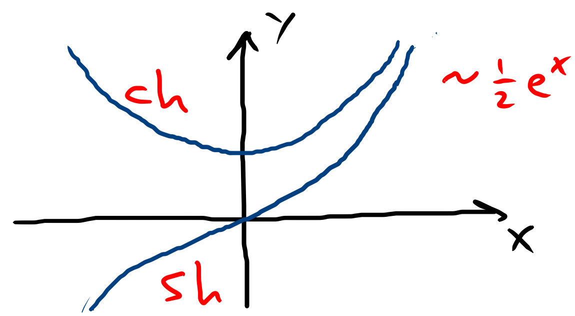
$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \,, \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

verwandte Funktionen:

$\cosh x \equiv \operatorname{ch} x := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

$\sinh x \equiv \operatorname{sh} x := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

Eigenschaften: $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \,, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 = 1$



$\partial_x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$

$\partial_x \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$

(5.11)

V.3 Potenzreihen

Exp.-Funktion war Beispiel einer Potenzreihe

Def.: Potenzreihe ist formale Summe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =: P_\infty(x)$ $\quad c_n \in \mathbb{R}$

Eigenschaften:

- Konvergenz? falls $\left| \sum_{n=k}^{\ell} c_n x^n \right| < \varepsilon$ für $\forall k, \ell > N(\varepsilon)$
- Approximation einer Funktion $f(x)$ [sogar ohne Konvergenz]

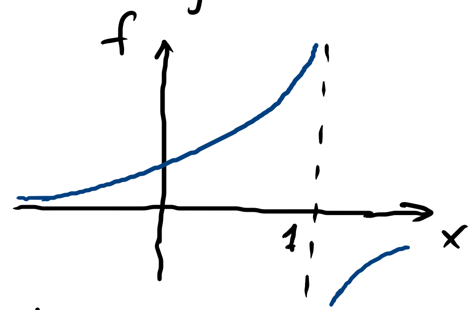
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n + R_{N+1}(x)$$

Restglied von $O(x^{N+1})$

nur gut falls $f(x)$ nicht pathologisch bei $x=0$

- Darstellung einer Funktion über Potenzreihenansatz, z.B. für Lösen von Differenzialgleichungen zweites wichtiges Beispiel: geometrische Reihe

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



erfinde Gleichung für diese Funktion

a) $f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightsquigarrow \begin{cases} f'(x) = f(x)^2 \\ (1-x) f'(x) = f(x) \end{cases}$ oder $f(0)=1$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow (1-x) f(x) = 1$ algebraisch

setze Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ein!

in b)

$$1 = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n x^n - c_n x^{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^{p+1} \underset{p+1=n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) x^n$$

Koeffizientenvergleich: $1 = c_0,\ 0 = c_1 - c_0,\ \dots,\ 0 = c_n - c_{n-1}, \dots \rightsquigarrow c_n = 1$

Ergebnis: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $|x| < 1$

(5.12)

Approximation $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + R_{N+1}(x)$

Restglied durch „Abspalten":

$(1-x)\, f(x) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad f(x) = 1 + x \cdot \underline{f(x)}$

$$= 1 + x\,(1 + x \cdot f(x)) \qquad = 1 + x + x^2 \cdot f(x)$$

$$= 1 + x\,(1 + x\,(1 + x \cdot f(x))) \qquad = 1 + x + x^2 + x^3 \cdot f(x)$$

$$= \dots \qquad = \underbrace{1 + x + \dots + x^N} + x^{N+1} \cdot f(x)$$

$$\hookrightarrow \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N = (1 - x^{N+1}) \cdot f(x)$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{N} x^n + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

(5.13) $\qquad R_{N+1}(x)$

Tricks, wie man Potenzreihen bastelt:

- Einsetzen:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

- Umformen: $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$\sqrt{1+x}^2 = 1+x = (c_0+c_1x+c_2x^2+\dots)\cdot(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots)$$
$$= c_0^2 + 2c_0c_1x + (2c_0c_2+c_1^2)x^2+\dots$$

Vergleich: $1 = c_0^2$, $1 = 2c_0c_1$, $0 = 2c_0c_2+c_1^2$, ...

$\rightsquigarrow$ $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{8}$, ...

- Differenzieren: $\ln(1+x) = ?$

$$\partial_x \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty}(-x)^m = \partial_x\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}(-1)^m x^{m+1} + \text{konst}\right)$$

konst? $\ln(1+0) = 0 = \text{konst}$

also: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots$ (5.14)

- Addition:

$$\text{ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n \text{ gerade}}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

sh x analog oder mit $\partial_x \text{ch}\, x = \text{sh}\, x$ $\rightsquigarrow$ $\text{sh}\, x = \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{x^n}{n!} = x+\dots$

- Differenzialgleichungen

$f'' + f = 0$ mit AW $f(0)=1$, $f'(0)=0$ Ansatz: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$\underset{m=n-2}{=} \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left[c_n n(n-1) + c_{n-2} \right] x^{n-2}$$

Vergleich: $c_n = -\dfrac{c_{n-2}}{n(n-1)}$ AW: $c_0 = 1$, $c_1 = 0$

$\rightsquigarrow$ $c_{n \text{ ungerade}} = 0$, $c_{n \text{ gerade}} = \pm \dfrac{1}{n!}$

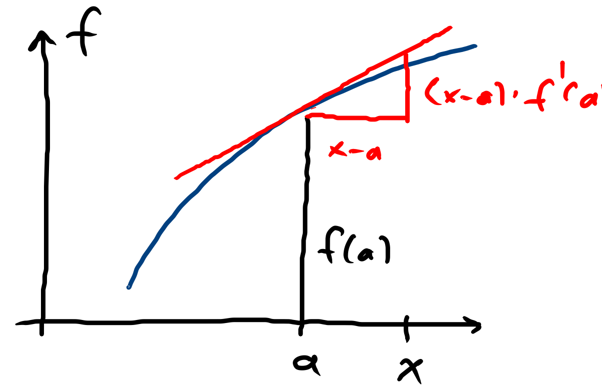
$\rightsquigarrow$ $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \pm \ldots = \cos x$ (5.15)

analog für AW $f(0)=0$, $f'(0)=1$: $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \mp \ldots = \sin x$

Taylor-Reihe

wir kennen lineare Approximation von $f(x)$ bei $x=\bar{x}$

$$f(x=\bar{x}+\varepsilon) = f(\bar{x}) + \varepsilon\cdot f'(\bar{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$



benenne um: $\bar{x}\to a$, $\varepsilon = x-a$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + \mathcal{O}((x-a)^2)$$

besser: parabolische Approximation

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + (x-a)^2\cdot \underline{g(a)} + \mathcal{O}((x-a)^3)$$

differenziere nach x:

$$f'(x) = 0 + 1\cdot f'(a) + 2(x-a)\cdot g(a) + \mathcal{O}((x-a)^2)$$

$$f''(x) = 0 + 0 + 2\cdot g(a) + \mathcal{O}((x-a))$$

$$\rightsquigarrow \quad f''(a) = 2\cdot g(a) + 0 \quad \rightsquigarrow \quad g(a) = \tfrac{1}{2} f''(a)$$

nächste Schritt

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)^2\cdot\tfrac{1}{2} f''(a) + (x-a)^3\cdot\tfrac{1}{6} f'''(a) + \dots$$

$\rightsquigarrow \quad f(x) = f(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots$

mit $\quad f^{(n)}(a) = n!\, c_n \quad \rightsquigarrow \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$

n-te Ableitung

$\rightsquigarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$ Taylor-Reihe (5.16)

oder

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot h^n = \left(e^{h\partial_x} f\right)(a) \qquad (5.16')$$

$(\partial_x^n f)(a)$

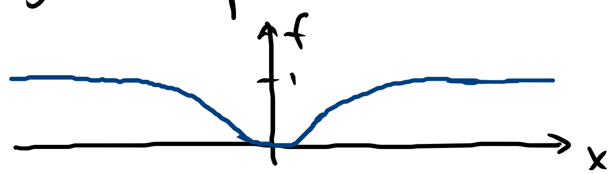
Abbruch bei $n=N$ $\Rightarrow$ Approx. von f durch Polynom N-ten Grades

Voraussetzung: $f \in C^\infty$ („hinreichend glatt")

geht nicht immer! Gegenbeispiel:

$f(x) = e^{-c/x^2}$

Taylorreihe $\equiv 0$



$f^{(n)}(x) = \mathrm{poly}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-c/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \forall n$

oft nützlich, z.B.: $f(x) = (1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)x + \dots$ (5.17)

$$= \binom{\lambda}{0} + \binom{\lambda}{1} x + \binom{\lambda}{2} x^2 + \dots$$

oft benutzt: harmonische Näherung für Teilchen im Potential nahe V-Minimum $(x=a)$

$$V(x) = V(a) + \cancel{V'(a)(x-a)} + \frac{1}{2} V''(a)(x-a)^2 + \mathcal{O}((x-a)^3)$$

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow$ Minimum

$$m\ddot{x} = -\partial_x V = -V''(a)(x-a) + \mathcal{O}((x-a)^2)$$

$$= -m\underline{\omega}^2 (x-a) + \dots$$ Hookesches Gesetz

$\omega^2 = V''(a)/m$ (5.18)

V.4 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Körper-Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um die Lösungen von

$x^2 + 1 = 0$. Nenne $\sqrt{-1} =: i$ „imaginäre Einheit"

also: $i \cdot i = -1$ (5.19)

komplexe Zahlen = Paare von reellen Zahlen (x, y)

= Linearkombinationen von 1 & i:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$$

Realteil $\mathrm{Re}(z) = x$ Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = y$

z heißt reell wenn $y = 0$, imaginär wenn $x = 0$

Addition: $(x+iy) + (u+iw) = (x+u) + i(y+w)$

Multiplikation: $(x+iy) \cdot (u+iw) = (xu - yw) + i(xw + yu)$

Negatives: $-(x+iy) = -x - iy$ Null: $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Inverses: $\dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

Körper: $z \cdot w = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee w = 0$

Wurzeln

$\sqrt{x+iy} = u+iw$ mit $u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$, $w = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2})}$

löst $(u+iw)^2 = x+iy$ $\curvearrowright$ jede komplexe Zahl $(\neq 0)$ hat genau 2 Wurzeln

Hauptsatz der Algebra:

Jedes Polynom n-ten Grades in $\mathbb{C}$ hat n Nullstellen (mit Multiplizität)

Konjugation: involutive Abbildung $i \longmapsto -i$

$$z = x+iy \longmapsto x-iy =: z^* \text{ oder } \bar{z}$$

$\curvearrowright$ $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+z^*)$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-z^*)$ (5.20)

$\curvearrowright$ z reell $\Leftrightarrow$ $z = z^*$ Involution: $(z^*)^* = z$

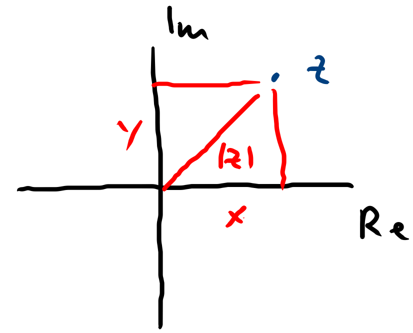
$\curvearrowright$ $(z+w)^* = z^* + w^*$ $(z\cdot w)^* = z^* \cdot w^*$

Betrag (Norm, Absolutwert): $z\cdot z^* = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2+y^2$

$$|z| = \sqrt{z\cdot z^*} = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \qquad (5.21)$$

$\curvearrowright$ $|z| = |z^*| = |-z|$, $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, $|z+w| \leq |z|+|w|$

geometrische Darstellung



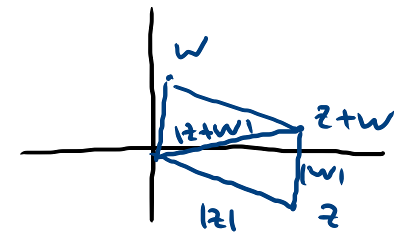
$z \doteq (x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ „komplexe Ebene"

Betrag $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ Länge des Zeilenvektors (x,y)

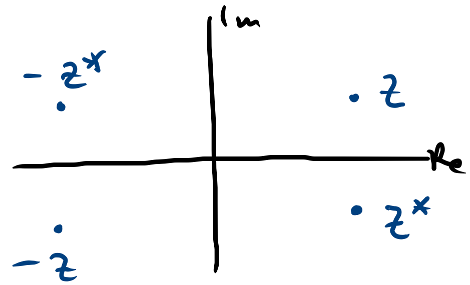
$\rightsquigarrow$ $|z-w|$ = Abstand zwischen z und w in $\mathbb{C}$

$|z+w| \le |z|+|w|$

Δs-Ungleichung

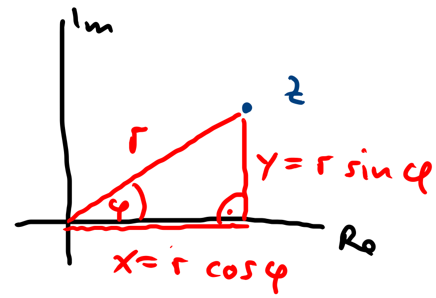


Spiegelung an Achsen



Addition ist vektoriell

Produkt? Polarkoordinaten:



$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(c + is)$$

mit $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

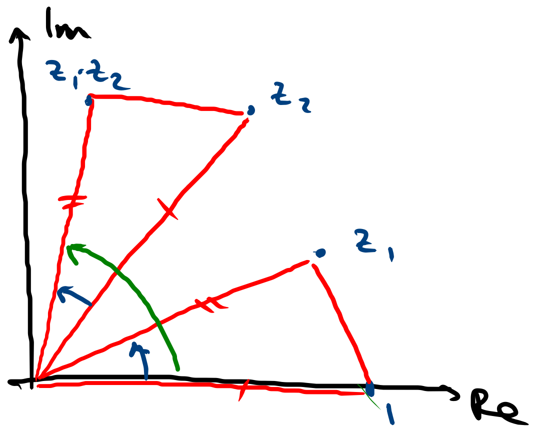
und $\varphi =: \arg(z) = \arctan y/x \mod 2\pi$ (5.22)

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (c_1 + is_1)\cdot(c_2 + is_2) = r_1 r_2 \{(c_1c_2 - s_1s_2) + i(c_1s_2 + c_2s_1)\}$$

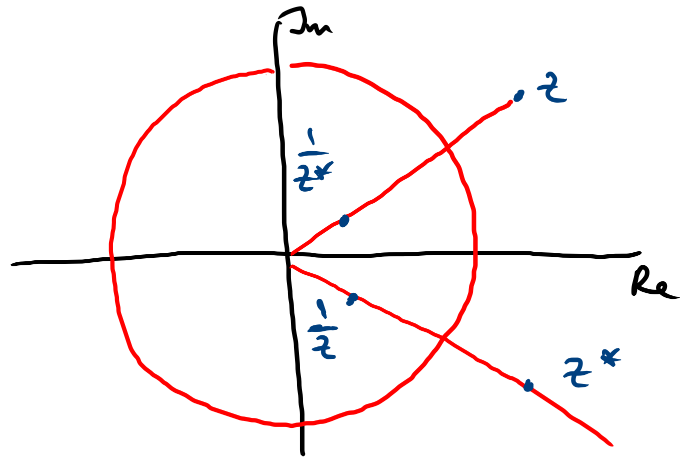
$$= r_1 r_2 \{\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\} \quad (5.23)$$

also: $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = r_1 r_2$ und $\arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

geometrisch



Inverses



$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

$$r \to \frac{1}{r}$$

Multiplikation mit i = Drehung um $\pi/2$ (90°)

Konsequenz

$$z^n = r^n (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

schnelle Methode, um $\cos n\varphi$ & $\sin n\varphi$ zu berechnen

z.B. $r=1$, $\cos n\varphi = \mathrm{Re}\,(z^n) = \mathrm{Re}\left([\cos\varphi + i \sin\varphi]^n\right)$ „Moivre"

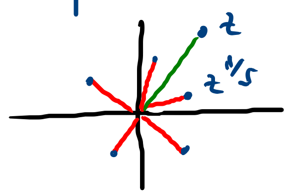
m-te Wurzel: $\sqrt[m]{z} = w \iff z = w^m$

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
$w = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta)$

$\hookrightarrow$ $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^m(\cos m\theta + i \sin m\theta)$

$\rightsquigarrow$ $\rho^m = r$, $m\theta = \varphi$ $\rightsquigarrow$ $\rho = \sqrt[m]{r}$, $\theta = \frac{\varphi}{m} + 2\pi\frac{k}{m}$ mit $k = 0, 1, \dots, m-1$

z.B.: $\sqrt[5]{z}$



5 Lösungen

Exponentialfunktion

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$ für $z \in \mathbb{C}$ existiert, wähle $z = iy$ imaginär

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \frac{1}{4!}(iy)^4 + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 \mp \dots\right) + i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 \mp \dots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y$$ Euler (5.24)

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \mathrm{ch}\,(ix)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{i}\,\mathrm{sh}(ix)$$

$$\rightarrow \quad z = r\, e^{i\varphi} \qquad (5.25)$$

speziell: $e^{i\varphi}$ Einheitskreis in $\mathbb{C}$

$$\left.\begin{aligned} e^{\pm i\pi} &= -1 \\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}} &= \pm i \end{aligned}\right\} \quad (5.26)$$